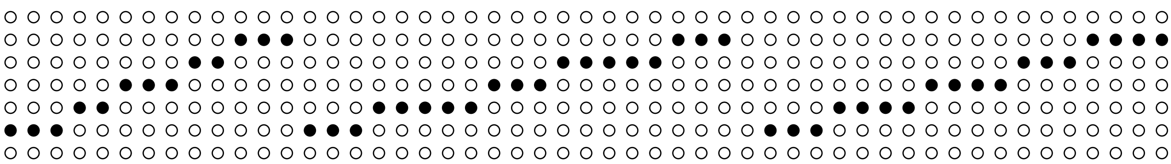
Datorskärmens geometri

Christer O. Kiselman

Innehåll:

1. Inledning

Punkter, räta linjer och plan har människan studerat i över två tusen år, och vissa kurvor, som ellipser och hyperblar, har varit föremål för vår nyfikenhet nästan lika länge. Allmännare kurvor, som lemniskator och kardioider, har studerats i flera hundra år. Studiet av sådana kurvor grundar sig på att vi kan rita dem på papper och få idéer från handritade bilder. Men med datorerna har vi fått ett nytt sätt att rita. På en datorskärm ser vi bilder, och bilderna består av små bildelement eller pixlar, som ögat sätter ihop till geometriska objekt. En rät linje blir då inte det som Euklides avsåg med en rät linje, utan en ändlig mängd av prickar på skärmen, som ögat ändå fogar ihop till ett sammanhängande linjestycke. En kurva är likaså en ändlig mängd av bildelement. (Se figur 1.)



Figur 1. Tre pixelmängder. Vilka av dem representerar en sträcka?

Finns det en geometri för dessa bilder på datorskärmen? Svaret är ja. Vi behöver inte nöja oss med att uppfatta bilderna som mer eller mindre noggranna approximationer av ideala räta linjer eller kurvor, utan kan behandla dessa ändliga punktmängder med samma exakthet som Euklides hade i sin geometri. Detta är den digitala geometrin. Den är ung jämfört med Euklides'.

Azriel Rosenfeld gav år 1974 en definition av begreppet digital rät linje. Erik Melin fann år 2003 en annan digitalisering av räta linjer, som respekterar Khalimskys topologi (vi skall snart införa denna). Vi kan också tala om kurvor i det digitala planet. Vi kan ta vilket begrepp som helst i den euklidiska geometrin och försöka översätta det till den digitala geometrin, och se om ett visst resultat i den euklidiska geometrin blir sant i den digitala.

Speciellt skall vi i denna artikel titta på Jordans kurvsats. Denna sats handlar om kurvor i det euklidiska planet och säger att en sluten enkel kurva delar planet i två delar: en inre och en yttre komponent. Beviset är svårt. Om man nu har en kurva i det digitala planet – den består alltså av ändligt många punkter – kan den då dela in planet i två delar? Svaret är ja. Det resultatet bevisades av Efim Khalimsky (E. D. Halimskij) 1970.

Vi skall här beskriva några begrepp inom den digitala geometrin och illustrera dem genom att diskutera Khalimskys digitala version av Jordans kurvsats. Men för att nå dit måste man ompröva en del invanda föreställningar.

Det är nu för tiden lätt att motivera den digitala geometrin med dess tillämpningar inom datorgrafik och bildanalys. Men det kan vara värt att notera att Khalimsky införde sin topologi redan 1969, synbarligen utan några sådan tillämpningar i åtanke.

2. Att räkna med kartesiska koordinater

Den klassiska geometrin handlar om punkter, räta linjer och plan, men också om cirklar, klot och andra figurer. Sådana geometriska objekt har studerats i tusentals år, och vi alla är mer eller mindre bekanta med dem. Grekerna skapade i antiken en axiomatisk teori, vilket innebär att man bevisade egenskaper utgående från ett antal grundläggande antaganden, axiom, som inte bevisades. Man kunde räkna ut areor och volymer, men annars räknade man inte så mycket.

En revolution i beräkningsavseende kom med Cartesius (René Descartes, 1596–1650). Han representerade en punkt i planet med ett par av tal (x_1, x_2) (talen kallas *kartesiska koordinater*) och en linje i planet med mängden av alla par av tal (x_1, x_2) som uppfyller en ekvation $a_1x_1+a_2x_2+a_3 = 0$, där inte både a_1 och a_2 är noll. Ett plan i det tredimensionella rummet representeras av mängden av alla tripplar av tal (x_1, x_2, x_3) som uppfyller en ekvation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$, där inte alla tre talen a_1, a_2, a_3 är noll. Om man har två räta linjer i planet med ekvationerna $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ och $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 = 0$, så skär de varandra i en viss mängd, och denna ges av alla lösningar (x_1, x_2) till båda ekvationerna. Kanske finns det ingen lösning (linjerna är skilda och parallella) eller oändligt många lösningar (linjerna sammanfaller) eller så finns det precis en lösning (linjerna skär varandra i en punkt). Man kan alltså genom räkningar avgöra vad som gäller och uttrycka svaret med hjälp av de sex talen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 och b_3.

3. Att representera figurer i en dator

Nästa revolution i beräkningsavseende kom med datorerna. Man kan nu lagra och bearbeta större informationsmängder än med papper och penna. Speciellt kan man lagra information om geometriska figurer. Vi vet sedan Cartesius att två tal räcker för att beskriva en punkt i planet, tre tal en punkt i rummet. Hur många tal behövs det för att beskriva en cirkel i planet? Jo, tre: centrum ges av två koordinater och radien av ett tal. Hur många tal behövs det för att beskriva en ellipsoid i det tredimensionella rummet? Centrum ges av tre koordinater; för de tre halvaxlarna behövs ytterligare tre tal. Så behöver man ange riktningen hos den största axeln; till detta behövs två vinklar.

För att sedan bestämma riktningen hos den näst största axeln behövs ytterligare en vinkel. Alltså kan ellipsoiden beskrivas fullständigt av nio tal. (Om man från början vet att några axlar är lika, så blir det färre.) Ett reellt tal kan behöva oändligt många decimaler för att beskrivas fullständigt, så vi måste nöja oss med att lagra ändligt många av dem. Att lagra nio tal med en viss rimlig precision i en dator kräver inte mycket minnesutrymme.

Men hur blir det om man vill beskriva en godtycklig mängd i planet? En regelbunden mängd, som en ellips, kan beskrivas med några få uppgifter: centrums läge, axlarnas längd och huvudaxelns riktning, men det finns många andra mängder, och i allmänhet krävs en stor samling data för att bestämma mängden. Det finns i själva verket så fruktansvärt många mängder i planet att vi inser att vi måste approximera på något sätt; vi kan ju bara lagra och behandla information som består av ändligt många tecken. Det innebär att vi får dela in planet i små bitar, och så tala om huruvida en viss bit ingår i mängden eller ej. Detta är ju egentligen inte något som har kommit med datorerna, ty ett fotografi i tidningen består av ett raster, vilket man ser om man tittar på det med en lupp. Rastret är så fint att man på litet större avstånd inte kan se det, och ögat uppfattar bilden på ett bra sätt och störs inte av rastret. Också våra ögon har en begränsad kapacitet att ta in information, och det utnyttjar man alltså när man trycker fotografier. På samma sätt består en datorskärm av ändligt många bildelement, och en rät linje är i själva verket en ändlig mängd av punkter; ögat fogar ihop punkterna till en linje om de ligger tillräckligt tätt.

Hur blir det nu om vi vill lagra information för att beskriva en godtycklig mängd i planet? Om vi som ett exempel tar en skärm som har 1 024 gånger 768 pixlar, dvs. är indelad i 1 024 små intervall på längden och 768 intervall på höjden, så innebär det att det finns $1\,024 \times 768 = 786\,432$ pixlar. Hur beskriver man en delmängd av dessa pixlar? För varje pixel måste man tala om huruvida den ingår i mängden eller ej. Om vi skriver en etta när pixeln är med i mängden och en nolla när den inte är med, behöver vi alltså skriva 786 432 nollor eller ettor för att beskriva en godtycklig delmängd av skärmen. Och det finns $2^{786\,432} \approx 10^{236\,740}$ olika mängder. (Detta tal kan jämföras med universums massa, som några astronomer skattar till 10^{53} kg, vilket är 6×10^{79} protonmassor eller 10^{83} elektronmassor. Man brukar ju tala om stora tal som astronomiska, men det är en metafor som inte bara har bleknat: den är helt missvisande.[1])

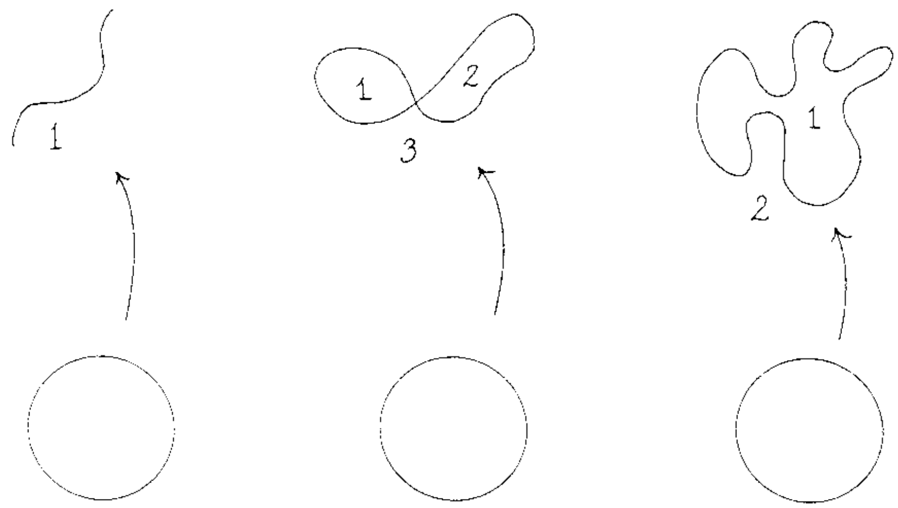
Om vi delar in hela planet i kvadratiska eller rektangulära pixlar så kan vi numrera dem med par av heltal. Vi låter helt enkelt (x_1, x_2) vara koordinaterna för centrum i en pixel i någon lämplig skala, vald så att x_1 och x_2 blir heltal. Därför kan vi helt enkelt tala om (x_1, x_2) som en pixel, fast det egentligen är pixelns adress.

4. Jordans kurvsats

En cirkel i planet delar in detta i två delar: ett inre område, där avståndet till centrum är mindre än radien, och ett yttre område, där avståndet till centrum är större än radien. På samma sätt är vi vana vid att andra, mer oregelbundna kurvor, delar in planet i ett inre område och ett yttre område. Vi kan alltså deformera cirkeln utan att

[1]Den som tror att denna slutsats beror på att universum har en ganska låg densitet ombedes beräkna massan hos ett fiktivt universum med radie lika med 14×10^9 ljusår $\approx 1,3 \times 10^{26}$ m och densitet lika med den hos en neutronstjärna, säg 10^{17} kg/m^3. Slutsatsen är densamma.

denna egenskap att dela in planet i två delar går förlorad. Camille Jordan (1838–1922) visade 1893 en sats med just denna innebörd. Om man tar en kurva som ligger i ett plan och som är lik en cirkel i en speciell mening, så består dess komplement av exakt två delar. Det är som ett staket som stänger in fåren och stänger ute vargen. Om kurvan ser ut som en åtta så delas planet in i tre delar, så sådana kurvor får inte accepteras om vi skall få den önskade uppdelningen av planet. (Se figur 2.)



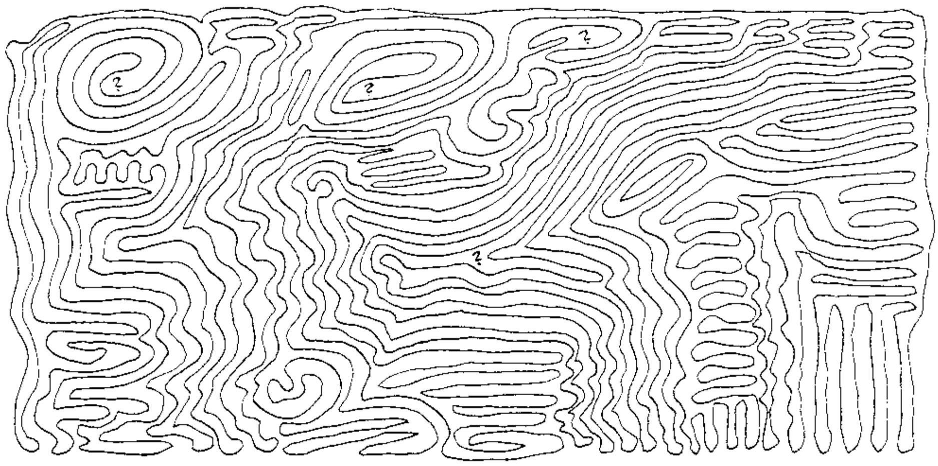
Figur 2. En kurva som inte är sluten; en kurva som inte är enkel; en enkel och sluten kurva.

Jordans kurvsats gäller alltså för kurvor som är tillräckligt lika cirklar. Detta begrepp "tillräckligt lika" måste förstås preciseras, liksom vi bör förklara vad som menas med att kurvans komplement består av två bitar. För att göra det behöver vi topologi – detta ämne, som kan beskrivas som studiet av öppna mängder, skall vi ta upp i nästa avsnitt.

Beviset för Jordans kurvsats är svårt. För en cirkel är det ju lätt att avgöra om man ligger innanför eller utanför – man mäter bara avståndet till centrum. Men tänk på en kurva som Helge von Kochs snöflingekurva eller någon annan, oregelbunden fraktal. Om man ligger i närheten av den så ser man en mycket taggig kurva och det är omöjligt att avgöra genom att bara titta på punkter i närheten huruvida man ligger utanför eller inuti kurvan. Detsamma gäller för en labyrint (Se figur 3.)

5. Topologi

Jordans kurvsats gäller inte bara för cirklar utan även för kurvor som liknar cirklar. Vi behöver förklara vad som menas med att en kurva är tillräckligt lik en cirkel. Det matematiska ordet för detta är *homeomorf.* Vi kräver alltså att kurvan skall vara homeomorf med en cirkel. Vad betyder nu det? Kalla kurvan för K och en cirkel för C. Vi kräver först att det skall finnas en avbildning av C in i K (detta skriver man kort $f\colon C \to K$). Vi kräver dessutom att denna avbildning skall avbilda två olika punkter i C på två olika punkter i K (därmed har vi uteslutit åttan i figur 2, ty för den gäller att två olika punkter på cirkeln avbildas på samma punkt). Vi kräver också att varje punkt i K skall förekomma som bild under f av någon punkt i C. Om dessa krav är uppfyllda, så säger man att vi har en *bijektion* av C på K.



Figur 3. När är vi inne i kurvan?

Men vi har inte uteslutit en kurva som är ett linjestycke, ty den uppstår genom att man klipper upp cirkeln; vi har en bijektion mellan cirkeln och linjestycket. Och för en sträcka gäller ju inte satsen: dess komplement består bara av en enda bit. Tydligen fordras det ytterligare någon egenskap hos avbildningen. Denna egenskap är kontinuitet, som vi nu skall försöka förklara. Det vi skall kräva är att f är en bijektion och att både f och dess invers är kontinuerliga. Då är f en *homemorfism.*

Kontinuitet hos en avbildning f innebär att små ändringar hos ursprungspunkten (argumentet) ger upphov till blott små ändringar hos bildpunkten. Några språng får inte förekomma. Alltså: om punkten q ligger nära punkten p så skall bilden av q ligga nära bilden av p. Detta är ett intuitivt talesätt, som måste göras precist och hållbart, dvs. så att det tål olika generaliseringar. Detta kan ske genom att man studerar så kallade öppna mängder.

Om man har en mängd X och en mängd Y och en avbildning f av X in i Y, så kan man också definiera en avbildning av delmängderna av Y in i delmängderna av X. Om nämligen B är en delmängd av Y så kan vi titta på mängden av alla punkter x som avbildas in i B. Vi kallar denna mängd för *urbilden av* B och betecknar den $f^{-1}(B)$; det är alltså mängden av alla x i X sådana att $f(x)$ tillhör B.

Vi skapar nu familjer av särskilt fina mängder i X och Y och kallar dem för öppna mängder, och undrar om urbilden av en öppen mängd alltid är öppen. Om det är så, så säger man att avbildningen är *kontinuerlig.* (Namnet *öppen* är i sig helt godtyckligt: vi skulle kunna kalla sådana mängder för *gula mängder* eller *glada mängder* eller *trollsländor*, om vi nu tycker om trollsländor. En kontinuerlig avbildning är alltså en som ger en öppen urbild i X av varje öppen mängd i Y.

Man kan nu definiera öppna mängder på tallinjen $\mathbf{R}$ men också på linjen av hela tal $\mathbf{Z}$. Därmed kan man tala om kontinuerliga avbildningar $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ lika väl som kontinuerliga avbildningar $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Det finns många analogier mellan de två, och det är en stor fördel: om man har lärt sig något om de kontinuerliga avbildningarna $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (det reella fallet) så kan man använda den kunskapen utan att göra misstag också när man sysslar med avbildningar $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ (det digitala fallet). Det är just denna analogi som gör att man vill utveckla den digitala geometrin så att den liknar den reella och som gör att man kan känna sig lika hemma i båda. Den generation som har lärt sig euklidisk geometri får genom analogin lättare att förestå den digitala; i framtiden kanske det kommer att finnas barn som lärt sig digital geometri i skolan och som genom analogin kan lära sig den euklidiska.

Låt oss titta på definitionen i det första fallet. En delmängd A av tallinjen $\mathbf{R}$ kallas för *öppen* om det är så att det för varje punkt a som tillhör A finns ett litet intervall $[b, c]$ som ligger helt inne i A, där $b < a < c$. Man kan alltså röra sig fritt litet grand inne i A; därav namnet *öppen*. I planet $\mathbf{R}^2$ har man en punkt $a = (a_1, a_2)$ i A och det skall då finnas en liten rektangel $[b_1, c_1] \times [b_2, c_2]$ som får rum i A och med $b_1 < a_1 < c_1$ och $b_2 < a_2 < c_2$.

Om man har definierat en familj av öppna delmängder av en given mängd, och om familjen har vissa egenskaper, som vi här inte skall beskriva, så säger man att man har en *topologi*. Ordet betyder alltså två saker, dels en familj av öppna mängder, dels studiet av sådana strukturer – jämför med ordet *algebra*, som har en liknande dubbelbetydelse.

Med hjälp av öppna mängder kan vi nu definiera begreppet sammanhängande mängd. En mängd A kallas *sammanhängande* om den inte kan delas upp i en viss mening, nämligen så att om vi har två öppna mängder U och V sådana att $U \cup V$ innehåller A och $A \cap U$ och $A \cap V$ inte har någon gemensam punkt, så gäller antingen $A \subset U$ eller $A \subset V$. En *komponent* är en maximal sammanhängande mängd, dvs. en sammanhängande mängd som inte är äkta delmängd av någon sammanhängande mängd. Vi har nu alla begrepp som behövs för att förstå Jordans kurvsats, både den klassiska och den digitala.

Låt oss nu titta på hur den klassiska satsen lyder exakt.

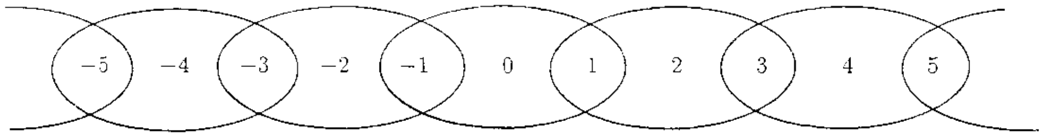
Sats (Jordans kurvsats). *Antag att $f\colon C \to \mathbf{R}^2$ är en homeomorfism av en cirkel C in i $\mathbf{R}^2$. Dess bild $K = f(C)$ delar planet $\mathbf{R}^2$ i precis två delar: $\mathbf{R}^2 \smallsetminus K$ har precis två komponenter.*

De två orden *homeomorfism* och *komponent* har nu fått sin förklaring. Med en *Jordankurva* menar man just en homeomorf bild av en cirkel.

6. Khalimskys topologi

Efim Khalimsky hittade på en topologi för de hela talen $\mathbf{Z}$ som lyder som följer. Man säger att en delmängd A av heltalen $\mathbf{Z}$ är *öppen* om det är så att för varje jämnt tal $2n$ i A också dess två udda grannar $2n - 1$ och $2n + 1$ ligger i A. Mängden av alla jämna tal är alltså inte öppen, ty de udda grannarna är ju inte med, men mängden av alla udda tal är öppen, eftersom det inte finns några jämna tal där man kan ställa kravet. Vidare är $\{1\}$ en öppen mängd, medan $\{0\}$ inte är det. Den minsta öppna mängden som innehåller $\{0\}$ är $\{-1, 0, 1\}$.

De jämna och udda talen spelar tydligen helt olika roller i Khalimskys topologi. Vad innebär detta för kontinuiteten hos en avbildning $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$? Om vi tar en godtycklig öppen delmängd B av $\mathbf{Z}$, så skall tydligen mängden A av alla punkter n som avbildas in i B vara öppen. Detta innebär att om ett jämnt tal $2n$ tillhör A, dvs. $f(2n) \in B$, så skall även $f(2n \pm 1) \in B$. Om $f(2n)$ är udda, så kan vi ta $B = \{f(2n)\}$ – det är ju en öppen mängd. Och då måste $f(2n \pm 1) = f(2n)$, dvs. funktionen måste vara konstant i mängden $\{2n - 1, 2n, 2n + 1\}$. Om däremot $f(2n)$ är ett jämnt tal, så kan vi ta



Figur 4. Khalimskylinjen.

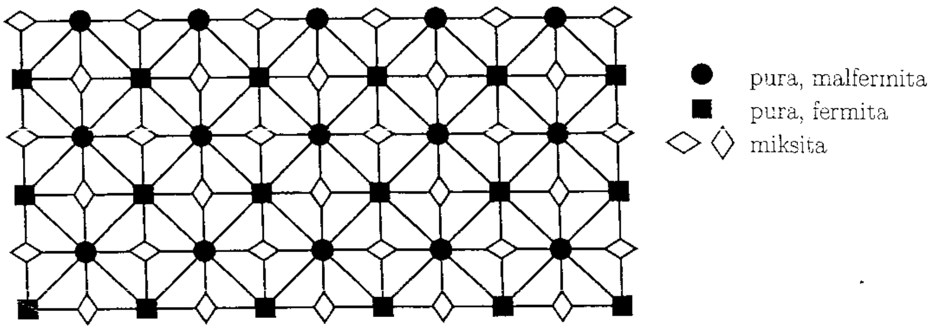
$B = \{f(2n)-1, f(2n), f(2n)+1\}$ och då måste $f(2n \pm 1)$ avbildas in i den mängden, vilket innebär att $f(2n \pm 1)$ kan avvika högst en enhet från $f(2n)$. En kontinuerlig funktion kan alltså aldrig ändra sig snabbare än ett steg för varje steg som argumentet tar, vilket medför att vi alltid har $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ för alla $x, y \in \mathbf{Z}$, men med den extra inskränkningen att den måste vara konstant i tre punkter $2n-1, 2n, 2n+1$ om den råkar ta ett udda värde i en jämn punkt $2n$. Man kan också uttrycka det så att funktionen kan ta olika värden i x och $x+1$, men bara om antingen både x och $f(x)$ är jämna eller om båda är udda. Detta innebär exempelvis att funktionen $f(x) = x + 2$ är kontinuerlig, men inte funktionen $f(x) = x + 1$.

Vi bildar nu planet $\mathbf{Z}^2$, som består av alla par av heltal, och vi kan ge även det en topologi. En delmängd A av $\mathbf{Z}^2$ kallas *öppen* om den för varje pixel $(x_1, x_2) \in A$ också innehåller pixlarna $(x_1 \pm 1, x_2)$ om x_1 är jämnt och $(x_1, x_2 \pm 1)$ om x_2 är jämnt. Det följer av detta att om A är öppen och $(x_1, x_2) \in A$ med både x_1 och x_2 jämna, så måste A innehålla även de fyra punkterna $(x_1 \pm 1, x_2 \pm 1)$. Därmed har vi en topologi i planet $\mathbf{Z}^2$. Vi kallar även den för *Khalimskys topologi.* Det finns nu flera slag av pixlar (x_1, x_2): de där både x_1 och x_2 är jämna; de där båda är udda; och de där en av koordinaterna är udda och den andra är jämn.

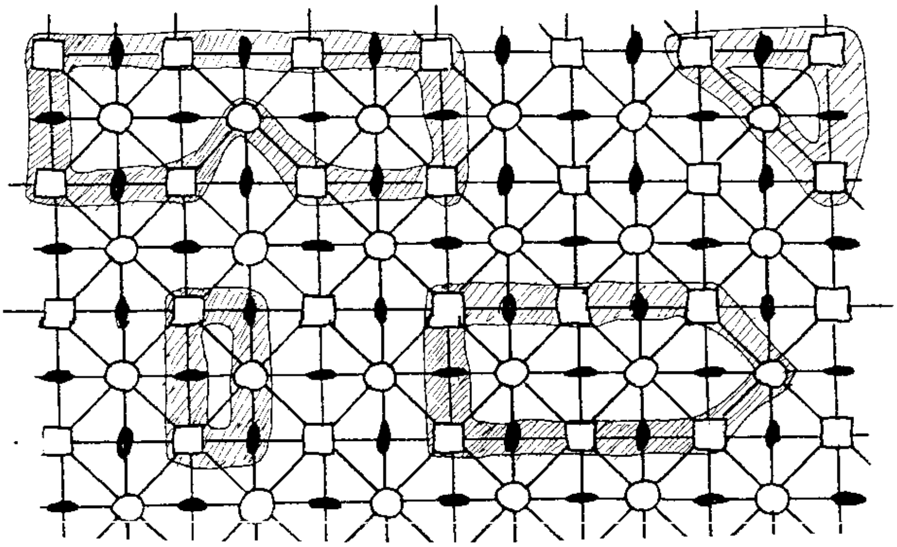
Vi kan nu tala om en kontinuerlig avbildning $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^2$, där både $\mathbf{Z}$ och $\mathbf{Z}^2$ ges Khalimskys topologi. Men vi behöver också en motsvarighet till cirkeln som vi använde i Jordans sats. En cirkel får man av $\mathbf{Z}$ genom att identifiera något jämnt tal m med noll. Det betyder att man identifierar talet $j + km$ med j för alla $k \in \mathbf{Z}$. Man säger att man räknar *modulo m.* Vi är ju vana att räkna klockslag modulo 12 eller 24. En resa som startar klockan 22 och tar 9 timmar är ju slut klockan 7; additionen lyder $22 + 9 = 7$. Låt oss med $\mathbf{Z}_m$ beteckna heltalen $\mathbf{Z}$ när man räknar modulo m. Dessa tal kan representeras av talen $0, 1, 2, ..., m-1$. Om man lägger 1 till $m-1$ så får man 0, dvs. man har gått urtavlan runt. (Att räkna modulo ett udda tal är inte bra i detta sammanhang, eftersom de udda och jämna talen spelar olika roller, och om man räknar modulo ett udda tal, så kan distinktionen inte upprätthållas; m identiferas ju med det jämna talet 0.) Låt oss säga att $\mathbf{Z}_m$ är en *Khalimskycirkel.*

En *digital Jordankurva* är en kontinuerlig avbildning av en Khalimskycirkel $\mathbf{Z}_m$ in i Khalimskyplanet $\mathbf{Z}^2$ sådan att dess invers existerar och är kontinuerlig. Vi har alltså en homeomorfism $f\colon \mathbf{Z}_m \to f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$. Definitionen är densamma som för de klassiska Jordankurvorna. Kurvan består av m punkter i planet $\mathbf{Z}^2$.

En Jordankurva kan svänga i en punkt endast om punktens bägge koordinater är jämna eller udda, och den kan svänga 45 eller 90 grader där, aldrig 135 grader. Om kurvan svänger i en punkt (x_1, x_2) med x_1 udda och x_2 jämn, så kan f inte vara kontinuerlig. Om kurvan svänger 135 grader, så är f^{-1} inte kontinuerlig. (Se figur 6.)



Figur 5. Khalimskyplanet.



Figur 6. Några kurvor.

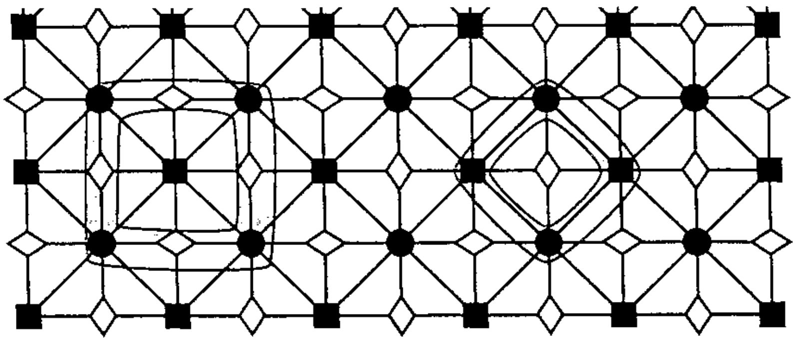
7. Jordans kurvsats i det digitala planet

Vi formulerar nu Khalimskys sats.

Sats (Khalimskys sats för digitala Jordankurvor). *Antag att* $f\colon \mathbf{Z}_m \to f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$ *är en homeomorfism av en Khalimskycirkel* $\mathbf{Z}_m$ *in i det digitala planet* $\mathbf{Z}^2$ *försett med Khalimskys topologi. Dess bild* $K = f(\mathbf{Z}_m)$ *delar planet* $\mathbf{Z}^2$ *i precis två delar:* $\mathbf{Z}^2 \smallsetminus K$ *har precis två komponenter.*

Satsen ser precis likadan ut som den klassiska Jordans kurvsats i avsnitt 4; det är topologierna som är olika.

Jordans klassiska sats är som sagt svår att bevisa. Beviset för den digitala satsen är mycket lättare. Det beror på att en digital Jordankurva bara kan innehålla ändligt många punkter och har en längd som är av formen $p+q\sqrt{2}$, där p och q är icke-negativa heltal. Om vi kortar av kurvan genom att ta en genväg, så måste längden minska till ett annat tal $p_1 + q_1\sqrt{2}$ (p_1, q_1 icke-negativa heltal) och detta kan bara ske ändligt många gånger. Beviset består av att man visar att alla Jordankurvor utom de allra kortaste verkligen kan kortas på ett sådant sätt att den nya kortare kurvan också är en Jordankurva. Efter ändligt många steg har man fått en kurva som är så kort att den inte kan kortas mera. (Se figur 7.) Men då är den av en mycket enkel typ, så enkel och kort att man direkt kan verifiera att slutsatsen gäller. Beviset är alltså ett induktionsbevis som går över kurvans längd. Något liknande är förstås inte möjligt i det klassiska fallet.



Figur 7. De minsta Jordankurvorna.

Den digitala kurvsatsen visar att man med ett digitalt staket kan stänga in och stänga ut lika väl som med en vanlig kurva. Prickarna på datorskärmen kan, trots att de bara är ändligt många, bilda ett staket med samma egenskaper som de klassiska Jordankurvorna. Knepet är att byta ut topologin.

8. Referenser

Halimskiĭ, E. D.

1970 Applications of connected ordered topological spaces in topology. Conference of Math. Departments of Povolsia.

Khalimsky, Efim; Kopperman, Ralph; Meyer Paul R.

1990 Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications* **36**, 1–17.

Kiselman, Christer O.

2000 Digital Jordan curve theorems. *Discrete Geometry for Digital Imagery,* 9th International Conference, DGCI 2000, Uppsala Sweden, December 13–15, 2000. (Eds. Gunilla Borgefors, Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja.) Lecture Notes in Computer Sciences **1953**, ss. 46–55. Springer.

2001 *Digital Geometry and Mathematical Morphology.* Föreläsningsanteckningar. Uppsala universitet, Matematiska institutionen. Kan hämtas hos `www.math.uu.se/~kiselman`

Melin, Erik

2003 *Connectedness and continuity in digital spaces with the Khalimsky topology.* Uppsala universitet, Matematiska institutionen, projektrapport 2003:9, 43 ss. Kan hämtas hos `www.math.uu.se/~melin`

Rosenfeld, Azriel

1974 Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers,* **C-23**, No. 12, 1264–1269.

9. Appendix: axiomatisk topologi

I detta appendix skall vi beskriva hur man kan bygga upp studiet av öppna mängder axiomatiskt. De familjer av öppna mängder som vi definierat har vissa egenskaper, nämligen att unionen av en godtycklig familj av öppna mängder är öppen och snittet av en ändlig familj av öppna mängder är öppet. Vi tar nu dessa egenskaper som utgångspunkt, som axiom. Låt alltså X vara en godtycklig mängd, och låt oss ha en familj $\mathcal{U}$ av delmängder av X som vi kallar öppna.

Axiom 1. *Om U_j, $j \in J$, är öppna, där J är en godtycklig indexmängd, så är unionen $\bigcup_{j\in J} U_j$ öppen.*

Detta innebär att om vi har mängder $U_j \in \mathcal{U}$, så tillhör mängden V av alla punkter som ligger i något U_j också $\mathcal{U}$: $V \in \mathcal{U}$.

Axiom 2. *Om U_j, $j \in J$, är öppna, där J är en ändlig indexmängd, så är snittet $\bigcap_{j\in J} U_j$ öppet.*

Detta innebär att om vi har ändligt många mängder $U_j \in \mathcal{U}$, så tillhör mängden W av alla punkter som ligger i alla U_j också i $\mathcal{U}$: $W \in \mathcal{U}$.

Eftersom det är tillåtet att låta J vara tom, så följer av axiom 1 att den tomma mängden är öppen, och av axiom 2 att hela rummet X är öppet, ty $\bigcup_{j\in\emptyset} U_j = \emptyset$ och $\bigcap_{j\in\emptyset} U_j = X$. (Den som tycker att detta verkar konstigt kan helt enkelt lägga till som ett axiom 3 att $\emptyset$ och X är öppna.)

Om vi har en familj $\mathcal{U}$ av delmängder av X som uppfyller axiomen, så säger vi att vi har en *topologi* på X, och att X med denna topologi är ett *topologiskt rum.* (Något avstånd behöver inte finnas.) Och om vi har två topologiska rum X och Y och en avbildning f av X in i Y, så säger vi att den är *kontinuerlig* om det är så att $\{x \in X; f(x) \in B\}$ är öppen för varje öppen mängd B i Y.

Man kan visa att de öppna mängderna som vi definierat på den reella tallinjen $\mathbf{R}$ uppfyller axiomen, lika väl som de som vi definierat på heltalslinjen $\mathbf{Z}$. De senare har till och med den starkare egenskapen att snittet av en godtycklig familj av öppna mängder är öppet. När det gäller de reella talen så är ju snittet av alla öppna intervall $]-1/n, 1/n[$, $n = 1, 2, 3, ...$, lika med punktmängden $\{0\}$, som inte är öppen, men för Khalimskys topologi är snittet av alla öppna mängder som innehåller en given punkt också öppet.

Vi har sett väsentligen två exempel på topologier (på $\mathbf{R}$ och på $\mathbf{Z}$). Men det finns många olika topologier. Fördelen med den axiomatiska uppbyggnaden är man kan få fram egenskaper som gäller för kontinuerliga avbildningar och sammanhängande mängder i många olika situationer.

Författarens adress: Uppsala universitet, Matematiska institutionen, Box 480, 751 06 Uppsala
Telefon: 018-4713216 (till arbetet); 018-300708 (hem); 0708-870708 (mobil)
Datoradress: kiselman@math.uu.se Telefax: 018-4713201