Sundelöfs Societet, ss. 25–42. Kungl. Vetenskaps-Societeten i Uppsala Publicerad 2015-05-08

Matematiska rum

Christer Kiselman

Resumé
Denna essä inleder med kommentarer rörande matematikens termer, speciellt dem som rör rum. Den nämner så de framgångsrika matematiska modeller som bygger på de reella talen och tar därefter upp diskreta modeller, som har helt andra egenskaper. Knutna mattor och mosaiker är diskreta och kan ses som föregångare till den digitala geometrin. Genom datorernas utveckling har diskreta modeller blivit allt mer betydelsefulla. Avslutningsvis framförs vissa mer personliga varningar.

Inledning

Att kunna bidra till symposiet för Lars-Olof Sundelöf den 4 juni 2014, liksom till denna bok, som hyllar Lars-Olof och hans mångåriga gärning, en ytterst välförtjänt hyllning, är en stor glädje för mig.

Rubriken *Det matematiska och det fysikaliska rummet*, som givits åt Gunnar Ingelmans och mitt föredrag, är välfunnen och lätt att ta som utgångspunkt för en tankelabyrint med många ingångar och många utgångar.

Matematikens termer

Matematiker talar mycket om rum, och låt mig börja med terminologin. Facktermer inom matematiken är ofta hämtade från vardagsspråket. När algebran utvecklades under artonhundratalet använde man helt vardagliga ord på tyska och franska motsvarande de svenska *rum, grupp, ring, kropp, egenvärde.* Inom mängdteorin och den begynnande topologin gjorde man på samma sätt: substantiv som *mängd, klass, familj, hölje, omgivning* och adjektiv som *öppen, sluten, tät* kom till användning. Senare tillkom termer motsvarande de svenska orden *filter, tunna, kärna* och *mager.* Så idén var, och är fortfarande, att ta ord som redan finns och ge dem en ny betydelse — onekligen ganska praktiskt.

De vardagliga orden kan ge ett intryck av lätthet — och det var kanske meningen när termerna infördes på tyska och franska under artonhundratalet. Men lättheten är bedräglig: de vardagliga orden har fått nya, hemliga betydelser.

Den mycket studerade algebraiska struktur som på svenska heter *ring* heter på tyska och franska *Ring* respektive *anneau*, och de orden förtjänar en extra kommentar. Det tyska ordet *Ring* betyder inte bara '(finger)ring' och 'ringformat föremål', utan har även en sekundär betydelse 'kartell, trust, grupp, parti, förbund' och dessutom 'band, klick, gäng', d.v.s. det handlar om människor som samverkar i en krets. När David Hilbert (1862–1943) för första gången använde *Zahlenring* 1897, tänkte han säkert på just denna sekundära betydelse — det var tal som samverkade.

Termen översattes till franska som *anneau*, som betyder 'ring, ringformat föremål' men som saknar den sekundära betydelsen av människor i samverkan. Det franska ordet blev bara en fackterm bland många utan de associationer som det tyska ordet har.

Dock finns förstås också lärda ord från grekiska och latin inom matematiken: vi har *analytic, holomorphic, meromorphic, isomorphism, homomorphism, homeomorphism, ethmomorphism, cleistomorphism, anoiktomorphism* från grekiskan, och *linear, bilinear, sesquilinear, vector* från latinet.

Rummen

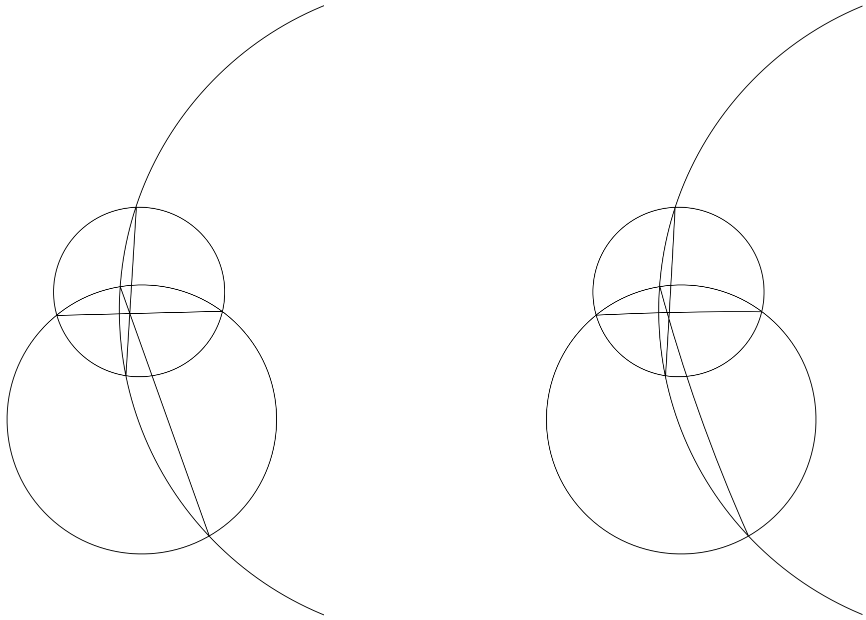
Men åter till rummen! Det finns inom matematiken massor av sådana; ibland kallas de rymder. I dem lever många matematiker sina liv. På engelska, franska, ryska, tyska och polska har vi *space, espace, пространство, Raum, przestrzeń*, som betyder 'rymd' eller 'utrymme' eller 'rum' i varierande nyanser. Vi har euklidiska rum efter Euklides (omkring 325 – omkring 265 f.Kr. eller möjligen senare[1]); Hilbertrum, de rum som har de rundaste kloten, efter David Hilbert; Hausdorffrum efter Felix Hausdorff (1868–1942); Montelrum efter Paul Montel (1876–1975); Fréchetrum efter Maurice Fréchet (1878–1973); Banachrum, som kan ha kantiga klot i motsats till Hilbertrummen, efter Stefan Banach (1892–1945); Schwartzrummen efter Laurent Schwartz (1915–2002); Mackeyrum efter George Mackey (1916–2006) och nu senast Khalimskyrum efter Efim Khalimsky. Och till varje rum finns det ett dualrum, som ofta har andra egenskaper och lyder under andra lagar. Exempelvis finns till rummet av lägen det duala rummet av frekvenser.

Alla dessa begrepp har kommit till som generaliseringar av den vanliga geometrin. Det euklidiska planet är två-dimensionellt, och kan överblickas, men rum är ofta av oändlig dimension, och därför måste många matematiker träna sina ögon att se inte bara i tre eller fyra dimensioner utan även i oändligt många. Det är en spännande övning — och berikande! Man kan träna upp sig i denna sport, liksom i alla andra sporter.

Rummen är i hög grad geometri och de är visuella. Det kan tyckas att högre dimensioner skulle vara svårare att se i än lägre, men ofta kan det faktiskt underlätta att gå upp i en högre dimension. Ett enkelt exempel på detta syns i Figur 1, där vi har tre cirklar i ett plan, och drar tre kordor genom skärningspunkterna mellan varje par av cirklar.

Kommer dessa kordor att skära varandra i en punkt, som i den vänstra figuren? Eller kan de bilda en liten triangel, som i den högra figuren? Naturligtvis kan vi sätta oss ned och räkna så som Cartesius, René Descartes (1596–1650), lärt oss. Men om vi ser cirklarna som snittet mellan planet och tre sfärer i det tredimensionella rummet

[1]Waschies (1998:367) skriver att det inte finns några pålitliga källor enligt vilka Euklides skulle ha levt före Archimedes (cirka 285–212). Tillsammans med några andra indikationer öppnar detta den fantastiska möjligheten att Archimedes under sitt besök i Alexandria kan ha mött inte bara Euklides' elever eller deras elever, utan kanske även Euklides själv.



Figur 1. Skär de tre kordorna varandra i en punkt?

med medelpunkterna i samma plan, så är det uppenbart att varje par av sfärer skär varandra i en cirkel, och att de tre sfärerna skär varandra i två punkter, och dessa två punkter ligger precis ovanför respektive under skärningspunkten mellan de tre kordorna. Genom att lyfta blicken till en högre dimension ser vi direkt att den vänstra figuren gäller; den högra kan inte inträffa.

Teleskop och mikroskop

Med Jan Bomans ord (1991:23) fungerar matematiken för intellektet som teleskopet för ögat: den utsträcker intellektets räckvidd; den sätter oss i stånd att förstå långt. Man kan också jämföra med mikroskopet — att se in i de minsta detaljerna, att särskilja eljest omärkliga logiska nyanser.

Mycket i vår omvärld bygger på matematik, men den är ofta osynlig i sina många tillämpningar, och dess roll glöms därför ofta bort. Med Tosun Terzioğlu kan vi konstatera att matematiken är en stor rikedom, som borde bli bättre känd:

> We should strive to increase the awareness of our young people, that throughout history we have created a tremendous amount of human wealth—in music, literature, architecture, philosophy and in mathematics. These human values, when taught properly, will infuse a new sense of pride and confidence in ourselves, a new hope for a better and peaceful life on our planet. We should revise the unfulfilled dream of von Humboldt and try to make it come true. (Terzioğlu 2002)

Detta hans uttalande innebär förstås ett visst ställningstagande i frågan huruvida matematiken upptäcks eller uppfinnes.

Matematiken är neutral . . . utan gränser . . . och utan raser

Matematikerna vistas i många rum, matematiskt sett, men de har också egna sociala rum. Matematikerna står litet vid sidan om den övriga vetenskapen, och ännu mer vid sidan om många andra samhälleliga aktiviteter. Detta tycker jag är synd, men det är kanske nödvändigt: för att se tydligt och kunna kritisera behöver man stå på ett visst avstånd från det man granskar.

Matematiken är neutral: den kan användas för både onda och goda syften. Därför har alla som skapar eller använder matematik ett särskilt ansvar.

Om solen går runt jorden eller tvärtom spelar ingen roll så länge man bara behandlar dessa två kroppar — en enkel koordinattransformation förbinder de båda synsätten. Matematiken är neutral så långt. Men om man tar med andra planeter blir den ena hypotesen mycket enklare än den andra, och enkelhet är en kraftfull guide i sökandet.

Inte heller är det så viktigt om jorden står stilla mitt i ett roterande himlavalv eller roterar — om man inte behöver göra någon mer avancerad beräkning. Men corioliskraften, uppkallad efter Gaspard-Gustave Coriolis (1792–1843), som påverkar alla vindar på jorden, blir obegriplig på en jord som inte roterar. Begriplighet är likaså en pålitlig guide.

Så kan matematiken visa oss vägen med enkelhet och begriplighet som ledstjärnor. Litet oprecist brukar man sammanfatta dessa egenskaper som skönhet.

Matematiken är också utan gränser och raser. David Hilbert höll ett matematiskt föredrag vid den internationella matematikerkongressen i Bologna 1928. Han planerade att hålla också ett politiskt tal: i det bevarade manuskriptet står det ”Die Mathematik kennt keine Rassen”. Men det är inte belagt att han verkligen höll detta politiska tal, där uttalandet skulle ingå (Reinhard Siegmund-Schultze, personligt meddelande 2014-08-19; se också Siegmund-Schultze 2014:1238, fotnot 17).

Matematikens sanningar är universella och eviga . . . eller?

Matematikens resultat har stor räckvidd i rumtiden: “Our conclusions are true, unconditionally and eternally. The Babylonians’ quadratic formula and the Greeks’ proof of the irrationality of $\sqrt{2}$ are true even in the Large Magellanic Cloud.” (Nathanson 2008:773). Men kanske smyger sig ett tvivel in:

> Still, there is a nagging worry about this belief in mathematical certitude.
> [. . .]
> The reason is that many great and important theorems don’t actually have proofs. They have sketches of proofs, outlines of arguments, hints and intuitions that were obvious to the author (at least, at the time of writing) and that, hopefully, are understood and believed by some part of the mathematical community. (Nathanson 2008:773)

Ja, så är det. Men på en skala mellan föränderlighet och konstans är nog matematiken bland alla vetenskaper den vars resultat ligger närmast den andra ändpunkten.

Blicka framåt!

Lars-Olof Sundelöf har uttryckt en önskan att detta symposium skall blicka framåt snarare än bakåt. Jag är ingalunda förvånad över att han formulerat denna önskan — men konstaterar med glädje att boken innehåller Lars Engwalls kapitel ”Sundelöfs Societet”, som ger en bild av Lars-Olofs strålande, mångåriga insatser i det vetenskapliga samarbetets tjänst.

Om man nu skall tala om framtiden, finns många möjligheter att göra bort sig, tydligast förstås om det skrivs ned och kommer att kunna läsas om fem eller femtio år. Allt riskerar att bli löjligt. Jag minns två prognoser som gjordes för ungefär 55 år sedan; den ena är uppfylld med råge; den andra inte alls. Men låt oss inte vara fega.

Modeller som bygger på de reella talen ... och diskreta modeller

Jag vill säga något om diskreta matematiska modeller i kontrast mot dem som använder reella eller komplexa tal. För att blicka framåt måste vi ändå börja med att blicka bakåt.

Isaac Newton (1642–1727) och Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) skapade det vi i dag kallar differential- och integralkalkyl. Denna kalkyl levererar en utomordentligt framgångsrik matematisk modell för många olika studier av vår omvärld.

Johannes Kepler (1571–1630) formulerade tre lagar för planeternas rörelser i solsystemet. De är tre oberoende påståenden. Med detta menar jag att man kan tänka sig åtta olika universa där antingen ingen av dem, en av dem (tre fall), två av dem (tre fall) eller alla tre lagarna gäller. Ingen lag tvingar någon annan lag att gälla.

Den första lagen säger att en planet rör sig runt solen i en ellips med solen i den ena brännpunkten. För att förstå den bör man veta vad en ellips är och vad dess brännpunkter är. Kometer kan röra sig i banor som är ellipser, parabler eller hyperbler, så alla andragradskurvor förekommer i solsystemet.

Den andra lagen säger att planetens hastighet varierar med avståndet, så att den area som sträckan mellan solen och planeten sveper över på en viss tidsenhet är konstant. Det gör att planeten rör sig fortare när den är närmare solen. Jorden är närmast solen omkring den 4 januari, så då är soldygnet längre än i början av juli. För att förstå den andra lagen bör man förstå areabegreppet för en sektor i en ellips, som ges av en dubbelintegral, men i nödfall kan man klara sig med arean hos en triangel, eftersom sektorn, för en kort tid, är nära en triangel.

Den tredje lagen är den enda som jämför två olika planeter. Den säger att omloppstidernas kvadrater är proportionella mot kuberna på medelavstånden till solen. Ju längre bort från solen en planet ligger, desto saktare går den i sin bana: banans längd är ungefär proportionell mot medelavståndet, medan omloppstiden växer kraftigare: den är proportionell mot medelavståndet höjt till $3/2$. Så man behöver förstå något om potenser. Och hur skall medelavståndet tolkas för en bana som inte är en cirkel?

Newton kunde från en enda lag, den om gravitationen, härleda Keplers tre lagar, som därigenom knöts ihop och inte längre är isolerade från varandra. Och för att göra detta fordrades nya matematiska verktyg, de som Newton och Leibniz gav oss.

För att få ut Keplers lagar från gravitationslagen fordras en hel del matematik. Det visar sig då att det medelavstånd som omnämnts måste tolkas som längden hos ellipsens halva storaxel, som är medelvärdet av det minsta avståndet (perihelieavståndet) och det största avståndet (aphelieavståndet) — och som ingalunda är det enda tänkbara medelavståndet.

Vidare är den tredje lagen inte exakt om planeterna har olika massor: en planet med större massa går runt solen snabbare än en med mindre massa. För att se detta kan vi titta på den mer exakta form som Keplers tredje lag fått av Newton:

$$\frac{P_2^2}{P_1^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2} \cdot \frac{a_2^3}{a_1^3},$$

där P_1 och P_2 är omloppstiderna för två planeter, M solens massa, m_1 och m_2 de två planeternas massor, och a_1 och a_2 deras medelavstånd till solen (Strömgren & Strömgren 1945:192). Om nu planeterna har samma massa, $m_2 = m_1$, så blir faktorn $(M + m_1)/(M + m_2)$ lika med 1 och vi får exakt Keplers tredje lag. Men om till exempel planeterna är jorden med massan m_1 och Jupiter med massan $m_2 > m_1$, så blir denna faktor litet mindre än 1. Med tillgängliga uppgifter om m_1/M och m_2/M (det räcker att känna till dessa kvoter), så blir faktorn $(M+m_1)/(M+m_2) = (1 + m_1/M)/(1 + m_2/M)$ ungefär lika med 0,999049.

Om vi betraktar omloppstiderna som givna, så blir förhållandet mellan avstånden

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt[3]{\frac{M + m_2}{M + m_1}} \cdot \frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}} \approx 1{,}00032\,\frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}} > \frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}}.$$

Ett så litet fel i avståndet till Jupiter, blott 0,3 promille, kunde man inte upptäcka på Keplers tid.

Keplers lagar är empiriska: han kom fram till dem genom att studera observationer. Newton knöt ihop dem med en teori. Hans modell bygger på idén att tiden och rummet kan beskrivas med hjälp av reella tal; i fallet tiden med ett enda reellt tal för varje tidpunkt; i fallet rummet med en trippel av tal, punktens kartesiska koordinater, uppkallade efter Cartesius. Mellan två olika tidpunkter finns det alltid en tredje, till exempel deras mittpunkt, och motsvarande gäller för rummet.

Det finns emellertid andra modeller än de reella och komplexa talen: de hela talen. De är diskreta: man hoppar från ett helt tal till nästa med ett språng på en enhet. Det går inte att hoppa någon mindre sträcka. Mittpunkten mellan 5 och 6 är inte ett helt tal; den finns inte.

Man talar också om *diskretisering*, ett ord som innebär att man utför en operation. En vanlig sådan är att ta heltalsdelen av ett reellt tal; talet $\pi = 3{,}14159\ldots$ avrundas till 3. Mer vardagligt är öresavrundning uppåt eller nedåt. Man avbildar alltså de rationella eller de reella talen på de hela talen. Men det behöver inte vara så att man startar från reella tal och från dem konstruerar något diskret: allt kan vara diskret redan från första början.

Det diskreta är uråldrigt

En matta som knyts har ett visst ändligt antal knutar, och de mönster som framställs åstadkommes med ändligt många informationspunkter.

En mosaik är på samma sätt diskret: med ändligt många små stenar kan man visa upp ansikten, mänskliga gestalter och vilka bilder som helst. Varje element är en tessella, en liten sten som bygger upp mosaiken.

En bild i tidningen återger grått som en kombination av svarta och vita rasterpunkter. Nutidens kameror skapar ett foto med hjälp av ändligt många pixlar. Men idén fanns som sagt redan i mattor och mosaiker för flera tusen år sedan — de förebådade den digitala geometrin.

Det diskreta i fysiken

Det finns två modeller för ljuset: det kan beskrivas som en vågrörelse eller som fotoner, som är diskreta objekt.

Niels Bohr (1885–1962) lade år 1913 fram en atommodell enligt vilken elektronerna i en atom endast kan finnas på vissa diskreta energinivåer. En elektron kan hoppa upp till en högre bana genom att absorbera en foton, ett visst kvantum av ljus.

I anslutning till denna kvantisering vill jag nämna att Newtons modell upphör att vara meningsfull för korta tider och korta sträckor, nämligen för dem som är kortare än Plancktiden respektive Planckländgden, då rumtiden förlorar mening på grund av gravitationens kvantfluktuationer. Men under flera sekel var Newtons modell utomordentligt användbar — och är det förstås alltjämt, i rätt sammanhang.

Fonologi

Diskretisering finns också som en mer vardaglig upplevelse, som alla vuxna varit med om: övergången från ljud till fonem. Ett litet barn kan potentiellt skapa tusentals ljud, men börjar snart lära sig fonemen, som inte är så många, kanske några tiotal. Detta är en diskretisering. Ungefär i puberteten upphör för de flesta förmågan att skapa ljud mellan fonemen.

Diskretiseringen är emellertid olika i olika språk. Medan svensktalande kan skilja på *fira* och *fyra*, mellan *Idre* och *Ydre*, så kan vissa talare av andra språk, där /i:/ och /y:/ inte är olika fonem, inte göra den distinktionen. De har som barn gjort en annan diskretisering. Ett tydligt exempel är kontrasten mellan fonemen i polska och svenska. Stefan Jerzy Budmar räknar med 18 vokalfonem i svenska mot blott 8 i polska (1983:50), och 28 konsonantfonem plus två halvvokaler i polska mot bara 18 i svenska (1983:52–53). Detta medför att en person som bara lärt sig svenska fonem har svårt att höra skillnad på de många konsonanterna i polska; omvänt vållar distinktionen mellan långa och korta vokaler i svenskan svårigheter för polsktalande.

Och medan svenskan bara har distinktionen *vas* / *vass*, *fin* / *finn*, skiljer finskan både på långa och korta vokaler och på långa och korta konsonanter (se till exempel Sajavaara & Dufva (2001:250)). Några exempel, hämtade från Lieko (1992:94): De två vokalerna /u/ och /e/ och konsonanten /l/ kan teoretiskt ge upphov till åtta möjliga kombinationer av långa och korta fonem. Av dessa åtta kombinationer är det bara en som inte är realiserad; sju ord finns i språket: *tule* 'kom' (imperativ); *tulee* 'han/hon/det kommer'; *ei tulle* 'han kommer antagligen inte' (negativ potentialis av *tulla* 'att komma', tredje person singular); *tullee* 'han kommer antagligen' (potentialis av *tulla* 'att komma'); *tuulee* 'det blåser'; *ei tuulle* 'det blåser antagligen inte' (negativ potentialis av *tuulla* 'att blåsa', tredje person singular); *tuullee* 'det blåser antagligen' (potentialis av *tuulla* 'att blåsa', tredje person singular).

Digital telefoni, musik och television

Digital teknik har kommit att användas för att överföra ljud och ljus i många sammanhang. Ljudvågorna i luften består av tryckvariationer, som en mikrofon förvandlar till en analog signal. Denna samplas till en digital signal, som kan registreras på en CD, sändas genom en elektrisk ledning, eller sändas som en radiosignal. När man skall lyssna på rösten eller musiken förvandlas den digitala signalen tillbaka till en analog signal. Detta låter som en omväg — och är en omväg. Fördelen är att de digitala signalerna kan överföras med en lägre sändningskapacitet, respektive kan lagras med ett mindre minnesutrymme, än de analoga. Med en digital inspelning slipper man det knaster som ofta hörs från en vinylskiva, där dammet stör nålens vibrationer i spåret. Men genom att det digitala uppstår genom sampling, d.v.s. ett val av värden i ändligt många punkter, så får den digitalt överförda eller lagrade musiken vissa begränsningar, som naturligtvis måste sättas i relation till vad det mänskliga örat förmår uppfatta.

Diskret tid?

Datorerna arbetar i diskreta tidsteg och deras utveckling har gjort diskreta strukturer alltmer aktuella. Detta väcker naturligt en fråga: kan själva tiden diskretiseras?

Vi kan gå tillbaka till Zenon från Elea (Ζήνων ὁ Ἐλεάτης; omkring 490 – omkring 430). Han formulerade fyra paradoxer om rörelse, som Segelberg (1945) och Ferber (1981) diskuterar i detalj. En av dem kallas tudelningsparadoxen eftersom den resonerar om halvering av en sträcka. Den säger att rörelse är omöjlig eftersom ett föremål som rör sig först måste avverka halva sträckan. Om vi säger att det skall röra sig från 0 till 1, måste det alltså först komma till en halv, och innan dess till en fjärdedel, och så vidare. Vi ser att det måste komma till alla punkter med koordinater $k/2^m$, $k = 1, \dots, 2^m - 1$, $m = 1, 2, \dots$, alltså oändligt många. Vi kan tänka oss alla dessa punkter som en potentiell oändlighet, eftersom vi i en konstruktion först kan ta de ändligt många punkterna $k/2^m$ för ett visst m och sedan gå vidare till $m+1$. Så konstruerade Euklides mittpunkterna. Men föremålet kan inte röra sig i denna ordning. Därför representerar dessa punkter en faktisk oändlighet för föremålet, och härav den påstådda omöjligheten (se till exempel White (1992:147)).

Vi vet att distinktionen mellan potentiell oändlighet och faktisk oändlighet var viktig för de grekiska filosoferna och matematikerna. Det finns oändligt många primtal, men enligt Euklides bildar de en potentiell oändlighet, vilket innebär att om man har en viss ändlig mängd av primtal, så kan man alltid konstruera ett till. Man behöver inte tänka sig att alla primtal finns samtidigt. Se en diskussion om detta i min uppsats (2015).

En annan av Zenons paradoxer handlar om pilen som inte kan röra sig och kan ses som en föregångare till en teori för en diskret tid, och därför också för en diskret rät linje.

Det skulle vara intressant att veta vad Euklides tänkte om dessa paradoxer. Som jag förstår det är hans räta linjer neutrala med avseende på de konsekvenser som Zenons diskretiserade tid eller linje leder till.

Numera tänker vi vanligen på en linje som en mängd av punkter. Alltsedan Descartes införde koordinater har detta varit naturligt. En linje har då oändligt många element. Men för Euklides var det inte så: en linje hos honom är ett självständigt, enhetligt objekt. Den *består* inte av punkter; de punkter som nämns är *speciella märken* på linjen, på franska *repères* (Federspiel (1992:389, 1998:67); Kiselman (2015)). Och i en ändlig geometrisk konstruktion kan vi bara ha ändligt många *repères*, i kontrast mot de potentiellt oändligt många som uppstår vid upprepade delningar av pilens bana.

Vi har två konkurrerande idéer: den räta linjen är enligt Euklides delbar hur många gånger som helst, medan tiden består av ögonblick som inte kan delas upp vidare. De är motstridande: vi kan inte nå fram till atomerna genom att dela upp en sträcka om denna är obegränsat delbar.

Att tiden är diskret var en teori som utvecklades i Spanien under medeltiden:

> As regards the theoretical and philosophical analysis of time, the most important and original contribution of medieval Islamic thinkers was their theory of discontinuous, or atomistic, time. (Whitrow 1990:79)

De gjorde en kompromiss genom att göra tiden delbar till en viss hög grad men ge upp oändlig delbarhet. Att det fanns en relation till Zenons paradoxer verkar troligt. Moshe ben Maimun (född 1135 eller 1138 i Córdoba och död 1204 nära Kairo), en judisk filosof verksam i muslimska kulturkretsar och mera känd under sitt grekiska namn Maimonides, skrev:

> Time is composed of time-atoms, i.e. of many parts, which in account of their short durations cannot be divided. ... An hour is, e.g. divided into sixty minutes, the second into sixty parts and so on; at last after ten or more successive divisions by sixty, time-elements are obtained which are not subject to division, and in fact are indivisible. (Whitrow 1990:79)

Så når vi fram till tidens atomer! Efter två delningar kommer vi till 60^{-2} timmar, som är en sekund, och efter tio till 60^{-10} timmar, ungefär 6 femtosekunder, medan 60^{-11} timmar är ungefär 100 attosekunder. Vi är därmed nere i den tidsskala som används för vissa kemiska reaktioner som numera studeras inom femtokemin 800 år senare. En av jordens snabbaste datorer kan utföra $3.386 \cdot 10^{16}$ flyttalsoperationer per sekund, vilket innebär att varje operation får ta högst 30 attosekunder. Så Maimonides gjorde rätt i att skriva inte tio gånger, utan tio gånger eller mer. Plancktiden är ännu kortare, blott $5{,}391 \cdot 10^{-44}$ sekunder.

Diskreta strukturer i framtiden

Vi skulle se framåt, men ofrånkomligen gled jag in på historien! Dock: det diskreta tillhör framtiden. De diskreta modellerna är något som utvecklas just nu, och jag menar att de kommer att behöva utvecklas under många år framåt.

För att bara ta ett exempel: Euklides' räta linjer har studerats under mer än två tusen år; digitala räta linjer studerades på allvar första gången av Azriel Rosenfeld (1931–2004) i ett arbete som kom ut för fyrtio år sedan (1974). Och denna teori för digitala räta linjer i planet utvidgas nu till digitala plan i det tredimensionella rummet och vidare i högre dimensioner. Detta är ingalunda avslutat.

Exempel på diskretisering av räta linjer

Två räta linjer i det euklidiska planet är antingen parallella eller så möts de i en och endast en punkt. Om linjerna är icke-vertikala, så kan vi ge dem ekvationerna $y = ax+b$ och $y = cx+d$ enligt Cartesius' kalkyl, och vi finner att de möts i punkten

$$\left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right),$$

förutsatt att lutningarna a och c är olika.

En vanlig diskretisering av kurvor i planet är att kurvan som ges av $y = F(x)$, x reellt, ersätts av $y = f(x) = \lfloor F(x) \rfloor$, x ett heltal, där $\lfloor t \rfloor$ betecknar det största heltal som är mindre än eller lika med talet t, vilket innebär att olikheterna $t-1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$ gäller. Funktionen $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ kallas *golvfunktionen*. Man avrundar helt enkelt nedåt; som redan nämnts är $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Om vi nu väljer $F(x) = -\frac{1}{2}x$ och $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, två räta linjer med olika lutning, så finner vi att de diskretiserade linjerna, som ges av $f(x) = \lfloor F(x) \rfloor$ och $g(x) = \lfloor G(x) \rfloor$, aldrig möts för något heltal x. Skall vi då ge upp egenskapen hos de euklidiska räta linjerna att två icke-parallella linjer i planet möts? Eller skall vi hitta på andra diskretiseringar? Detta är aktuella frågor. En lösning har föreslagits av Efim Khalimsky — från början utan tanke på denna användning.

Ett annat märkligt exempel får vi om vi väljer $F(x) = \frac{1}{2}x$ och $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. De representerar två parallella linjer i det euklidiska planet, ty bådas lutning är en halv. Men när vi diskretiserar med hjälp av golvfunktionen, finner vi att $\lfloor F(x) \rfloor = \lfloor G(x) \rfloor$ då x är ett jämnt heltal, medan $\lfloor F(x) \rfloor$ och $\lfloor G(x) \rfloor$ är olika då x är ett udda heltal. Så vi får två digitala linjer som inte är lika men ändå har oändligt många gemensamma punkter.

Dessa två exempel visar på några problem som uppstår vid diskretisering om man vill behålla de egenskaper man blivit van vid i Euklides' geometri.

Derivator och differenser

Derivatan av en funktion är ett gränsvärde av dividerade differenser:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En dator kan inte handskas med gränsvärden, så den måste räkna med differenser. Ibland säger numerikerna att de löser partiella differentialekvationer, men det gör de inte: de löser differensekvationer som på något sätt approximerar differentialekvationer.

Diskreta objekt per se

Jag anser att det är viktigt att se de digitala objekten inte som approximationer av de gamla vanliga objekten, av dem som vi är vana att se modellerade med reella tal, utan som objekt i deras egen existens, i deras egen kraft. Där ser jag många framtida forskningsprojekt. Digital geometri behövs för bildbehandling, för konstruktion av kameror, för datorgrafik och mycket annat.

Vi kan redan spela luffarschack i tre dimensioner. Hur blir det i fyra eller fem dimensioner?

Tropisk matematik och matematisk morfologi

I detta sammanhang vill jag nämna tropisk matematik, som har utvecklats starkt under senare år, och som har visst släktskap med diskretisering. Man ersätter addition av två tal med operationen att ta det största av dem, och multiplikation med addition. I formler blir det:

$$x +_{\mathrm{trop}} y = \max(x, y), \qquad x \times_{\mathrm{trop}} y = x + y, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Man kan uppfatta dessa operationer som gränsvärden för de vanliga:

$$x +_{\mathrm{trop}} y = \lim_{h \to 0} h \log(e^{x/h} + e^{y/h}), \qquad x \times_{\mathrm{trop}} y = \lim_{h \to 0} h \log(e^{x/h} \times e^{y/h}),$$

där h är ett positivt tal som går mot noll, inte utan skäl kallat just h som Plancks konstant. Här ser man att det handlar om avkvantisering: Plancks konstant går mot noll.

Det blir en på något sätt enklare algebra. Ursprunget till benämningen är inte klarlagt, men enligt ett skämt blir matematiken lagom svår när det är hett i tropikerna. Därmed studerar man både kvantisering och avkvantisering. Mikael Passare (1959–2011), som fick Lilly och Sven Thuréus' pris av Vetenskaps-Societeten år 1991 (Sundelöf 1993:12; Passare 1993), arbetade under sina sista år med tropisk geometri. För en introduktion till tropisk geometri se Maclagan & Sturmfels (kommande).

Inom bildbehandling spelar den matematiska morfologin en stor roll. Där är de fundamentala operationerna maximum och minimum:

$$x \vee y = \max(x, y) \text{ och } x \wedge y = \min(x, y).$$

Medan Fourieranalysen är anpassad till analysen av ljudvågor, och därmed till hörselsinnet, är den matematiska morfologin anpassad till synsinnet. I en orkester kan man inte se ett instrument om någon sitter framför, men man kan höra alla instrument, även de skymda, ty ljudvågorna går runt dem som sitter framför. Detta motsvaras av att vi från summan $s = a+x$ kan återvinna en obekant storhet x genom att subtrahera a från s, men vi kan inte återvinna x från maximum $m = \max(a, x)$ om a är större än x.

Ekvationen $a + x = s$, där x är obekant, har alltid en och endast en lösning, nämligen $x = s - a$, förutsatt att vi är i ett talområde som tillåter subtraktion. Men ekvationen $a \vee x = m$, där a, m och x är hela tal, har en och endast en lösning om $m > a$, nämligen $x = m$; ingen lösning alls om $m < a$; och oändligt många lösningar om $m = a$. Den liknar på så sätt vissa problem från verkliga livet, där ett problem kan ha $0, 1, 2, 3, \ldots$ lösningar; mera sällan exakt en lösning. Om matematisk morfologi se vidare till exempel Serra (1982; red., 1988) och Najman & Talbot (red., 2008).

Euklidisk geometri, digital geometri och tropisk geometri är tre slags geometrier, som kan kontrasteras mot varandra; som kan stödja och befrukta varandra. Tillsammans med matematisk morfologi utgör de viktiga forskningsområden med många tekniska tillämpningar.

Mer om framtiden – nu mest varningar

Yttre hot

Då och då kommer det ut texter som pläderar för mindre matematik, eller ingen matematik (ett exempel är Thente 2012: ”Kanske är det så att lägre matematikintresse speglar det faktum att matematik inte längre är så väsentligt som äldre generationer inbillar sig.”) Sådana texter brukar motsägas mer eller mindre energiskt, men detta hindrar inte påståendena att komma fram om och om igen. Man kan höra att man måste kunna räkna litet för att ta reda på hur mycket en vara kostar om den säljs med femtio-procentig rabatt på reapriset, men mer än så behövs inte. I deklarationerna är allt beräknat av Skatteverket, så det räcker att kunna skriva sin namnteckning.

Och dessa skribenter har helt rätt.

Det är klart att alla i Sverige kan försörja sig på att odla kålrötter, *Brassica napobrassica*, som passande nog heter *swedes* i flera engelskspråkiga länder.

Vetenskap och teknik sköts ju bäst i vissa asiatiska länder, och det räcker kanske till för hela planeten. Dessa länder kan vid behov lätt skicka litet bistånd till Sverige om kålrötterna inte ger tillräckligt mycket vinst.

Kanske uppfattar någon läsare det nyss uttalade som ett skämt, ett dåligt skämt. Det handlar om en fördelning av arbetet som (ännu) inte helt realiserats. Men vi kan redan se en begynnande global arbetsfördelning. Vem bygger stora fartyg? Vem utvecklar programvara för datorer? Vem syr kläder? Vem doktorerar i matematik i USA? Vem städar kontor i Sverige? Vem kör taxi i Sverige? Och vem forskar i matematik, teknik och naturvetenskap i Sverige?

I skarp form blir frågan: eftersom svenskarna inte längre behöver bygga fartyg — koreanerna gör det mycket bättre — och eftersom de kanske inte heller behöver forska och utveckla teknik — vad skall de då sysselsätta sig med?

Någon menar kanske att forskningen ändå kan fortsätta i isolering från det svenska samhällets negativa inställning, men jag tror inte att ett elfenbenstorn kan överleva särskilt länge i kunskapsföraktets frätande syrabad. Vi har redan sett hur kunskapsföraktet fragmentiserat kunskapen att få en järnväg att fungera som ett sammanhängande tekniskt och socialt system (Nyberg 2013). Att tala om fragmentisering kan synas vara överdrivet, men det finns ett gott stöd:

> Fragmentiseringen av drifts- och underhållsverksamheten kan enligt utskottets mening ha bidragit till att det är svårare att kontrollera och säkerställa att den personal som utför underhållet faktiskt har nödvändig säkerhetskunskap. (Riksdagens trafikutskott 2011/12:55)

De asiatiska länderna har andra problem, nämligen vad gäller överdriven lydnad — arvet efter Konfucius hämmar kreativiteten — men man uppskattar i alla fall kunskap och utbildning på ett sätt som är helt okänt i Sverige.

Hur blir framtiden? Inre hot 1

Jag har redan antytt något om utifrån kommande hot mot vetenskapen. Men det finns också inomvetenskapliga hot, hot som vetenskaparna själva genererar. Det första är, enkelt uttryckt, revirtänkande. Vi människor formar grupper som håller ihop mot yttre fiender. Och grupper av vetenskapare förenar sig mot andra, som uppfattas som inkräktare.

Det kan gälla tidskrifter som ägnas ett visst område, och där redaktörerna avvisar manuskript för att de uppfattas som liggande utanför tidskriftens område fast de — sedda med andra ögon — hör dit och skulle ge en ny frisk insikt, men kanske också är ett hot. Hoten kan vara upplevda och i själva verket ofarliga, men de kan också vara verkliga, d.v.s. de hotar att utvidga ett snävt uppdraget revir, där många redan investerat tid och prestige.

Det är inte mycket till tröst att fenomenet inte är unikt för forskningen: ”Mais les brav's gens n'aiment pas que // L'on suive une autre route qu'eux …”, som Georges Brassens (1921–1981) uttrycker det i sin sång *La mauvaise réputation*.

Hur blir framtiden? Inre hot 2

Ett vetenskapligt ideal är vandraren som drar fram över berget utan stigar för att få överblick av himlen, jorden och sig själv. Men numera är vetenskapen snarare som en kolonn av tunga lastbilar med sex eller åtta hjul och kraftiga motorer. De gör djupa hjulspår och ju tyngre och mer påkostade de är, desto djupare blir hjulspåren, och desto svårare blir det för dem som kommer efter att hoppa ur hjulspåren. Kolonnerna av tunga lastbilar har därför blivit ett inomvetenskapligt hot mot vetenskapens förnyelse.

Jag menar inte att man alltid bör undvika hjulspåren — de visar ju hur föregångarna kunnat nå framgång, och de kanske fortfarande duger som en väg till framgång. Men inte i längden …

Flera akademier grundades på sexton- och sjuttonhundratalen; vår egen 1710. Det var framsynt; samarbete över ämnesgränserna behövdes, och tidskrifter som spred kunskaper skapades. Numera har flera sådana tidskrifter lagts ned, eftersom vetenskapen har delats upp i deldiscipliner, som blir mer och mer specialiserade.

Men den roll som akademierna hade på sjuttonhundratalet är inte mindre viktig nu. Att Vetenskaps-Societeten fungerat i över tre sekel är i sig ett märkligt fenomen, och det är något som vi måste fortsätta att hålla i rörelse. Det nya inom vetenskapen verkar komma fram mellan de klassiska disciplinerna, och där kan akademierna återigen ha en viktig funktion.

Utvärderingarna av forskning, som nu sker i närmast industriell skala,[2] bidrar förmodligen till en likriktning av ansträngningarna att nå ny kunskap. En stor framgångsrik forskargrupp kan inte erhålla annat än mycket positiva omdömen och ser därför knappast någon anledning att överge den väg som lett till framgång för att i stället ge sig in på mer osäkra projekt.

Varför kom jag in på detta? Anledningen är att min erfarenhet av forskning visar att viktiga idéer först dyker upp i liten skala, inte som stora projekt inom väletablerade forskargrupper. Att ta vara på dessa nya idéer är viktigt, men hur det skall kunna göras är inte självklart.

Att hoppa upp ur hjulspåren

Forskarens villkor är att alltid leva med det som man inte kan. Det är en ständig psykisk påfrestning, och inte alla förmår uthärda den. Förklaringen är enkel: om man kan allt man håller på med, så handlar det inte om forskning, inte om att tränga in i, eller ut i, det okända.

Nyfikenheten, att ta reda på det man inte vet och lära sig göra det man inte kan, är människans mest pålitliga drivkraft[3] — låt oss försöka behålla den så länge vi någonsin kan!

Att hoppa upp ur hjulspåren och på nytt sträva uppåt i den stiglösa terrängen är det viktigaste vi kan göra, och — om vi vill ha en framtid värd namnet — är just det som de unga måste göra för att förbättra mänsklighetens villkor. Och detta gäller förstås vare sig man älskar de matematiska rummen eller ej.

Trots allt

Den 4 juni 2014 slutade mitt anförande här. När jag nu läser det jag skrivit blir jag nedstämd. För att sluta i en mer positiv stämning vill jag citera ur två inspirerande tal som jag hörde under en Unesco-konferens 1998, där jag var NGO-deltagare, och från vilken jag rapporterade i Kiselman (1998). De framfördes av Federico Mayor, Unescos generaldirektör, och Lourdes Arizpe, Unescos biträdande generaldirektör för kultur. De lovar oss ingenting, men manar oss att gå framåt i den anda som jag redan antytt.

---

[2] Ett exempel: under läsåret 2014/15 har utvärderingsmyndigheten i Frankrike anlitat fyra tusen experter (Maylis Delest, personligt meddelande 2015-01-08). Myndigheten heter numera *Haut Conseil de l'évaluation de la recherche et de l'enseignement supérieur* (HCERES) och har tillkommit genom ett dekret av den 14 november 2014 som efterföljare till den tidigare organisationen *Agence d'évaluation de la recherche et de l'enseignement supérieur* (AERES).

[3] Detta är en viss förenkling. Vi får här bortse från mer komplicerade drivkrafter som determinantan (Rappaport 1977).

Kreativitetens natur

Federico Mayor inledde sitt öppningstal (på franska) med att skälla ut jordens alla regeringar för att de inte håller givna löften rörande kultur. Litet senare hyllade han kreativiteten (nu på engelska):

> Creativity cannot be channelled, checked, controlled, or offered as a package. Its role is not to ornament the status quo. Creativity goes against the wind, against the prevailing mood, against the order of the day. (Anförande av Federico Mayor 1998-03-30, här citerat efter Mayor (1998:83))

Vem bestämmer?

I sitt slutanförande, ett av de mest upplyftande anföranden jag någonsin lyssnat på, nådde Lourdes Arizpe till kulturens djupaste lager:

> In a discussion at this conference a man very sincerely told me: "I am worried because an alien culture is coming to my country that wants women to change.[”] And I answered: "Well, what do the women themselves want?". Because, as we found in the World Commission on Culture and Development, when you go to the deepest issues on culture, you are confronted with the ultimate question of who decides? (Anförande av Lourdes Arizpe 1998-04-02, här citerat efter Arizpe (1998:91))

Frihet att skapa

Lourdes Arizpe fortsatte:

> I would like to end by asking, what can only be asked at conferences such as this: who is thinking for the world? Because we no longer have a world made up of tribes but one interconnected and interactive, rooted in an ecosystem that we are all responsible for. *Our Creative Diversity* called for a United Nations that binds governments but also gives voice to peoples: this is a new frame of mind.
>
> To think new thoughts to fill this new frame of mind, we need freedom. Freedom of expression and freedom to create. (Anförande av Lourdes Arizpe 1998-04-02, här citerat efter Arizpe (1998:92))

Tack

Jag vill tacka Mats Almgren, Erik Bohlin, Gerd Brandell, Maylis Delest, Håkan Hedenmalm, Björn Ivarsson, Outi Elina Kansanen, Andrei Khrennikov, Sharon Rider, Jean Serra, Reinhard Siegmund-Schultze och Hania Uscka-Wehlou för värdefull hjälp.

Referenser

Arizpe, Lourdes. 1998. Summing up. **I:** Unesco (1998:89–92).

Boman, Jan. 1991. Matematik som poesi. *Dialoger* **18–19**, ss. 22–23.

Budmar, Stefan Jerzy. 1983. *Brytning hos svensktalande polacker.* Doktorsavhandling framlagd 1983-05-19. Uppsala Slavic Papers 6. Uppsala: Uppsala universitet.

Federspiel, Michel. 1992. Sur l'origine du mot σημεῖον en géométrie. *Revue des Études grecques.* Publication de l'Association pour l'Enseignement des Études grecques, Tome **105**, 385–405.

Federspiel, Michel. 1998. Sur un emploi de *sèmeion* dans les mathématiques grecques. **I:** *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie.* Actes du Colloque International de Saint-Étienne (6–8 juin 1996), ss. 55–78. Saint Étienne: Université de Saint-Étienne.

Ferber, Rafael. 1981. *Zenons Paradoxien der Bewegung und die Struktur von Raum und Zeit.* Munchen: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung.

Kiselman, Christer. 1998. Libereco de kreado estu homa rajto. *Esperanto*, nr. 5, maj, 85.

Kiselman, Christer O. 2015. Euclid's straight lines. *Nordisk matematisk tidskrift* **62**, nr. 4, 145–170. Formellt publiceringsår 2014.

Kungl. Vetenskaps-Societens i Uppsala årsbok 1992. 1993. Uppsala: Kungl. Vetenskaps-Societeten.

Lieko, Anneli. 1992. *Suomen kielen fonetiikaa ja fonologiaa ulkomaalaisille.* Loimaa: Loimaan Kirjapaino.

Maclagan, Diane; Sturmfels, Bernd. Kommande. *Introduction to Tropical Geometry.* Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

Mayor, Federico. 1998. Opening address. **I:** Unesco (1998:81–84).

Najman, Laurent; Talbot, Hugues. Red., 2008. *Morphologie mathématique 1.* Paris: Hermes Science; Lavoisier.

Nathanson, Melvin B. 2008. Desperately seeking mathematical truth. *Notices of the American Mathematical Society* **55**, nr. 7, augusti, 773.

Nyberg, Mikael. 2013. *Det stora tågrånet.* Stockholm: Karneval Förlag.

Passare, Mikael. 1993. Halva sanningen om en viktig produkt. Residyer i flera variabler. Föredrag vid Kungl. Vetenskaps-Societetens högtidsdag den 8 november 1991. **I:** Kungl. Vetenskaps-Societen (1993:17–20).

Rappaport, Leon. 1977. *Determinantan.* Lund: Bo Cavefors Bokförlag.

Riksdagen, Trafikutskottet. 2011/12. *Betänkande TU5.*

Rosenfeld, Azriel. 1974. Digital straight line segments. *IEEE Trans. Computers C-23*, no. 12, 1264–1269.

Sajavaara, Kari; Dufva, Hannele. 2001. Finnish-English Phonetics and Phonology. *International Journal of English Studies* **1**, 241–256.

Segelberg, Ivar. 1945. *Zenons paradoxer: en fenomenologisk studie.* (Doktorsavhandling försvarad vid Göteborgs högskola 1945-05-28.) Stockholm: Natur och Kultur.

Serra, Jean. 1982. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* London: Academic Press. xviii + 610 ss.

Serra, Jean. Red., 1988. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Volym 2. London et al.: Academic Press. xvi + 411 ss.

Siegmund-Schultze, Reinhard. 2014. One hundred years after the Great War (1914–2014): A century of breakdowns, resumptions and fundamental changes in international mathematical communication. **I:** *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul, 2014*, volume 4, ss. 1231–1253. Seoul: Kyung Moon SA.

Strömgren, Elis; Strömgren, Bengt. 1945. *Lærebog i Astronomi.* Andra upplagan. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Sundelöf, Lars-Olof. 1993. Anförande vid högtidsdagen den 8 november 1991. **I:** Kungl. Vetenskaps-Societen (1993:9–15).

Terzioğlu, Tosun. 2002. A human achievement: Mathematics without boundaries. **I:** Michael Boezi (Red.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, University of Crete, 1–6 July 2002.* CD publicerad av John Wiley & Sons Inc. ISBN: 0-471-46332-9. Finns på `www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invTer.pdf`; kontrollerad 2014-08-31.

Thente, Jonas. 2012. Matematik som huvudämne tillhör dåtiden — politikerna bör satsa framåt. *Dagens Nyheter* 2012-06-30, Kultur, s. 2.

Unesco. 1998. *Intergovernmental Conference on Cultural Policies for Development. Stockholm, 1998-03-30—04-02.* Final Report, English, 1998-08-31.

Waschies, Hans-Joachim. 1998. Mathematische Schriftsteller. **I:** Flashar, Hellmut (red.), *Die Philosophie der Antike.* Band 2:1. *Sophistik, Sokrates, Sokratik, Mathematik, Medizin*, ss. 365–453. Basel: Schwabe & CO AG Verlag.

White, Michael J. 1992. *The Continuous and the Discrete: Ancient Physical Theories from a Contemporary Perspective.* Oxford: Clarendon Press.

Whitrow, G. J. 1990. *Time in History: Views of time from prehistory to the present day.* Oxford; New York: Oxford University Press.

Författaren blev invald i Kungl. Vetenskaps-Societeten 1984 och är sedan september 2014 gästprofessor vid Uppsala universitet, Institutionen för informationsteknologi, Avdelningen för visuell information och interaktion, Datoriserad bildanalys och människa-dator-interaktion.
Papperspostadress: Box 337, 751 05 Uppsala
Bärnstensadresser: `kiselman@it.uu.se`, `christer@kiselman.eu`
URL: `www.cb.uu.se/~kiselman`