Publicerad i:
Matematiska språk. Sju essäer om symbolspråkets roll i matematiken.
Håkan Lennerstad & Christer Bergsten (red.), ss. 19–42.
Stockholm: Santérus Förlag 2008.

Matematikens två språk

Christer Kiselman

1. Inledning: Var finns matematiken? Var finns språken?

Vad menas med att matematiken finns? Finns matematiska konstruktioner i verkligheten? Finns språken i verkligheten? Och var i så fall?

Uppenbarligen finns språken på något sätt i våra hjärnor, dvs. i var och en av våra hjärnor. Men det räcker inte. På något sätt finns språket också i vårt kollektiva medvetande. Det är så att språket har både en fysiologisk existens, en viss lokalisering till vissa delar av hjärnan – man kan ju till och med mäta språkaktiviteter i hjärnan med magnetkamera – och en social existens inom hela språksamfundet. På samma sätt är matematiken lokaliserad i hjärnan, men också i ett kollektivt medvetande i ett samfund som är spritt över världen. Där har vi en viktig likhet mellan språken och matematiken. Båda har såväl en fysiologisk existens som en existens i det kollektiva medvetandet.

Titeln *Matematikens två språk* har jag valt för att jag anser inte bara att det är formelspråket som är ett specifikt matematiskt språk utan även att det matematiska fackspråket utan formler är ett speciellt, avvikande språk, och att det orsakar svårigheter vid studier lika väl som formlerna, även om svårigheterna är av olika natur i de två fallen. Det matematiska fackspråket utan formler avslöjar inte alltid sin karaktär av specialspråk och kan därför bjuda på mer förrädiska svårigheter än formlerna, som står ut som avvikare redan från början.

Dessa tankar har jag haft länge, innan jag läste artikeln av Lennerstad & Mouwitz (2004); när jag såg att de hävdar att matematiken är tvåspråkig, så stämde det precis. Men det bör tilläggas att det inte handlar om två självständiga språk: formler utan sammanhang, definitioner och antaganden är meningslösa; å andra sidan behöver fackspråket formler när det blir för komplicerat med bara ord.

Min huvudtes är därmed redan framlagd. I avsnitt 2 pekar jag på att matematiken går utöver det som man vanligen avser med ett språk. Efter några mer eller mindre tankeväckande citat i avsnitt 3 talar jag kort om makten över språket i avsnitt 4 – det blir mest frågor där. Avsnitten 5–12 är en samling observationer, där jag pekar på likheter och olikheter mellan allmänspråket och de två matematiska språken. Avsnitt 13 om ett australiskt språk och avsnitt 14 om gruppteori är insatta för att de kanske kan ge andra perspektiv utan att för den sakens skull hålla sig till ämnet.

Om mig själv
Jag är sedan barnaåren språkintresserad. Jag lever mina dagar på fyra språk. Det ger mig en känsla av att leva i fyra världar samtidigt, men den känslan är kanske illusorisk. Kanske är det bara en enda värld, en värld som ses ur litet olika vinklar – vad nu skillnaden kan vara mellan dessa alternativ.

Jag har intresserat mig för det svenska språkets ställning och ordförråd inom teknik, matematik och naturvetenskap. Jag arbetar till exempel med ett nationellt projekt rörande matematikterminologi i skolan. Jag har personliga erfarenheter av hur personer som lider av schizofreni använder sig av språket: det är förunderligt svårt att tränga in i och förstå deras språk. Detta är dock ingenting som jag har forskat på.

2. Matematiken är mer än ett språk

Man säger ofta att matematiken är ett språk, och då tänker man på formelspråket. Det kanske ligger något i det, men jag vill hellre säga att matematiken *har* ett språk. Ett språk som liknar andra språk, men som också uppvisar stora olikheter. Jag vill här peka på några likheter och olikheter.

När man säger att matematiken *är* ett språk, så riskerar man att glömma andra sidor av matematiken som inte så lätt låter sig inordnas i den liknelsen. Det är ganska klart att matematikens formelspråk utvecklats under lång tid från ett förkortat skrivsätt till att vara mera likt en räknare. Ordet *minus* förkortas till ett m med streck, $\overline{m}$, och sedan överlever bara strecket, som ursprungligen angav att några bokstäver utelämnats. Så kom troligen det nu använda minustecknet, $-$, till. Detta är en historia om förkortningar. Men när man kommer till kedjeregeln,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

så börjar formeln likna en liten räknemaskin. Därigenom går formlerna utöver språkens idé.

Ännu tydligare kanske detta framgår av följande exempel. Låt oss jämföra en formel med hur den kan läsas ut:

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$$

Integralen över högra halvaxeln av basen för de naturliga logaritmerna upphöjd till minus ett positivt tal gånger variabeln är lika med ett genom talet.

Den sista meningen är ekvivalent med formeln. Det går i alla fall att definiera alla ingående ord så att den blir ekvivalent med formeln. Men om man skall räkna ut integralen så är formeln vida överlägsen. Formeln ger inte bara en förkortning av det långa uttrycket, utan också ett skrivsätt som underlättar uträkningen. Det är lätt att införa en ny variabel $t = ax$, och man ser då att integralen måste ha formen C/a för någon konstant C; det återstår att bestämma denna. Tänk om vi skulle försöka göra en variabelsubstitution i det andra uttrycket! Det finns förstås andra sätt att läsa ut formeln, till exempel detta: *Arean under en avtagande exponentialfunktion med intensiteten $a > 0$ är lika med intensitetens inverterade värde.* Ett sådant sätt att beskriva formeln ger en bättre förklaring till vad som händer, men fordrar en djupare förståelse för de ingående begreppen – man kan inte säga att det bara är ett sätt att läsa ut formeln. Och vad skall man säga när man får veta att formeln inte bara gäller för positiva tal a utan även för komplexa tal a med positiv realdel?

Man kan förutsäga solförmörkelser med stor precision långt in i framtiden. Man kan beräkna hur ett flygplan bär sig åt i luften och behöver inte göra så många vindtunnelexperiment eller andra försök. Allt detta är välkänt, och jag skall inte uppehålla mig vid det, bara konstatera att detta knappast kan höra hemma under det som man normalt kallar språk.

Men ännu viktigare är kanske att geometrin, en viktig del av matematiken, knappast kan uppfattas som ett språk – eller i så fall som ett radikalt annorlunda. Geometrin är förknippad med människans spatiala och motoriska begåvning, och jag tror att den spatiala och motoriska begåvningen är av annat slag än den språkliga. Den som kan teckna och måla har en tvådimensionell spatial begåvning; den som kan teckna av omvärlden har en tredimensionell spatial begåvning, liksom den som kan snickra eller bygga modeller eller lägga plåttak. En balettdansös har en motorisk och spatial begåvning – jag skulle vilja säga tempo-spatial begåvning. Alla dessa aktiviteter hör samman med geometrin, och förmågan att tänka, rita och konstruera något i tre dimensioner är en genuint geometrisk begåvning. Matematikerna håller inte bara på med tre dimensioner utan även med fyra eller fem eller oändligt många, vilket förutsätter att man kan se (vad nu det betyder) i fyra eller fem eller oändligt många dimensioner. Faktum är att man kan träna sina (inre) ögon att se i fyra dimensioner.

Allt detta fångar man inte in om man säger att matematiken är ett språk – med mindre än att man inkluderar all denna motoriska och spatiala förmåga i språket förstås. Är en balettdansös' rörelser ett språk? Om ni svarar ja på den frågan, så har jag ingen invändning, men vi måste i så fall konstatera att begreppet språk har vidgats väsentligt. Det jag sagt visar ändå att matematiken, speciellt geometrin, går utöver det man vanligen brukar kalla språk.

Det matematiska språket måste finnas för att man skall kunna förmedla kunskaper, men upptäckten av dem kanske sker genom en intuitiv spatial upplevelse. Våra förfäder gungade nog i träden, och detta gungande gav upphov till en intuitiv, ordlös förståelse för svängande förlopp. De apor som inte klarade av denna förståelse föll ned ur träden, och vi har ärvt denna intuitiva förståelse från dem som överlevde, inte från dem som föll ned. Det är en enkel och lättbegriplig form av darwinism. Och denna intuitiva förståelse för svängningar finns nu formaliserad i Fourieranalysen, en viktig gren av matematiken som handlar om alla slags svängningar: ljus, ljud och alla andra vågrörelser.

Åter till matematikens språk. Bakom ett språk finns en kultur, en viss grupp, ett samfund, som bär upp språket. När man lär sig ett språk, så får man en nyckel till detta samfund, och kan uppleva något av det. Kanske kan man lära sig något om Japan utan att kunna japanska, men i så fall behöver man tolkar och översättare. På samma sätt kanske man kan säga att man behöver lära sig det matematiska språket för att komma matematiken nära, och om man inte har gjort det, så fordras det tolkar och översättare. Och man kan undra om det finns tillräckligt många tolkar och översättare från matematiska respektive japanska.

För att det hela skall fungera behövs det inte bara tolkar och översättare utan också japaner.

Vad är det då man når i matematiken, vad motsvarar kulturen hos den grupp som talar ett visst språk? På det kan man fundera. Mitt något provisoriska svar är att det är sammanhang och förståelse. Och människan behöver sammanhang och förståelse i sin värld. Ger matematiken då sammanhang och förståelse? Ja, det menar jag, men jag inser att inte alla upplever det så. Däri ligger en spänning mellan olika människors sätt att förstå och uppskatta matematiken.

3. Några citat

Efter en kanske alltför abstrakt inledning kan vi mjuka upp oss med några citat, först ett av Goethe, som kan konsten att förolämpa åt två håll samtidigt:

> Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes. [Matematikerna är ett slags fransmän; talar man med dem, så översätter de det till sitt eget språk, och då blir det genast något helt annat.] Johann Wolfgang von Goethe, 1749–1832. *Goethes Werke* Band XII, ”Maximen und Reflexionen”. Sjätte uppl., Hamburg 1967. [Kiselmans översättning]

Graden av abstraktion är viktig för Bertrand Russell, som menar att allmänspråket säger för mycket; det gäller att ta bort betydelser (och *abstrahera* betyder ju just ’dra bort’ eller ’dra av’).

> Ordinary language is totally unsuited for expressing what physics really asserts, since the words of everyday life are not sufficiently abstract. Only mathematics and mathematical logic can say as little as the physicist means to say. Bertrand Russell, *The Scientific Outlook, 1931*

Differentialkalkylen fungerade till en början utan en fast bas, menar han:

> Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be. Bertrand Russell i N. Rose, *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh, NC, 1988

Är matematiken anpassad till naturen? Eugene P. Wigner menade ju det, men enligt Russell skulle matematiken duga även för ett annat universum:

> It can be shown that a mathematical web of some kind can be woven about any universe containing several objects. The fact that our universe lends itself to mathematical treatment is not a fact of any great philosophical significance. Citerad i W. H. Auden and L. Kronenberger, *The Viking Book of Aphorisms,* New York 1966

Mera cyniskt formulerade han matematikens allmängiltighet så här:

> Mathematics may be defined as the subject where we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true. CPBR 3:366:31-3, *Recent Work on the Principles of Mathematics,* även känd som *Mathematics and the Metaphysicians*

Men matematiken är ändå bara en omformulering av annat språk:

> ... mathematics is only the art of saying the same thing in different words. *Autobiography,* Vol. 3, näst sista stycket

Ett lidande som flera kan känna igen beskrivs av Robi Polikar:

> One thing I suffered while I was learning the basics of the wavelet transform is the fact that the majority of the articles and books (if not all of them) are written by *math people,* for the *math people,* in a language which even most of the math people themselves cannot understand [...] Robi Polikar, *The Wavelet Tutorial*

Vem kan bli matematiker? Begåvning räcker kanske inte. Det skulle i alla fall gälla om Dan Andersson (1888–1920), menade hans far:

> Hans fattningsgåvor voro över det normala, såväl teoretiskt som i praktiskt avseende, och han hade kunnat utbildas till vad som helst utom matematiker. Minnesord av Dan Anderssons far, citerade efter Torsten Fogelquists essä, s. XXVI, i Dan Andersson, *Kolarhistorier,* Stockholm: Tidens förlag, 1930.

4. Makten över språket

Det går inte att undvika att tala om makt när det gäller språk. Lewis Carroll[1] har uttryckt det rakt på sak i *Through the Looking Glass* (The Milennium Fulcrum Edition 1991), kapitel VI, ”Humpty Dumpty”:

> 'I don't know what you mean by "glory,"' Alice said.
>
> Humpty Dumpty smiled contemptuously. 'Of course you don't – till I tell you. I meant "there's a nice knock-down argument for you!"'
>
> 'But "glory" doesn't mean "a nice knock-down argument,"' Alice objected.
>
> 'When *I* use a word,' Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, 'it means just what I choose it to mean – neither more nor less.'
>
> 'The question is,' said Alice, 'whether you CAN make words mean so many different things.'
>
> 'The question is,' said Humpty Dumpty, 'which is to be master – that's all.'
>
> Alice was too much puzzled to say anything, so after a minute Humpty Dumpty began again. 'They've a temper, some of them – particularly verbs, they're the proudest – adjectives you can do anything with, but not verbs – however, *I* can manage the whole of them! Impenetrability! That's what *I* say!'
>
> 'Would you tell me, please,' said Alice 'what that means?'
>
> 'Now you talk like a reasonable child,' said Humpty Dumpty, looking very much pleased. 'I meant by "impenetrability" that we've had enough of that subject, and it would be just as well if you'd mention what you

[1] Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson) föddes 1832-01-27 i Daresbury, Cheshire. Han dog i Guildford 1898-01-14.

> mean to do next, as I suppose you don't mean to stop here all the rest of your life.'
>
> 'That's a great deal to make one word mean,' Alice said in a thoughtful tone.
>
> 'When I make a word do a lot of work like that,' said Humpty Dumpty, 'I always pay it extra.'
>
> 'Oh!' said Alice. She was too much puzzled to make any other remark.

Vem har nu makten över språket? Det har språkbrukarna, svarar alltid språkvårdarna. Och det är förstås rätt svar. Men eftersom matematiken är såväl ett kulturellt element som en subkultur,[2] så kan svaret inte vara så enkelt när det gäller de två matematiska språken, det utan formler och formelspråket. Här kan man ana en spänning. Många hatar formler. De kan ha makt att ta bort formler. I Nationalencyklopedin, utgiven under åren 1989–1996, berömde sig fysikerna av att kunna förklara fysik utan att använda formler. Många hatar också det matematiska fackspråket utan formler: det anses arrogant. Men matematikerna är ingen mäktig grupp. Tvärtom: de utgör en mycket liten grupp med liten makt i de samhällen där de verkar. Det skulle vara intressant att kunna utveckla dessa motsättningar närmare.

5. Om och omm

Vardagens språk och matematikens är olika. Vanligen har allmänspråket mer redundans än matematikens språk. En vanlig iakttagelse är att ett enda ord kan spela stor roll i en matematisk facktext, mycket större än i allmänspråket med sin större redundans. Detta vållar välkända problem i utbildningen.

En annan skillnad är att allmänspråket ofta innehåller många outtalade förutsättningar. I matematiken bör förutsättningar anges så explicit som möjligt. Detta gör det matematiska språket tungt. Men att ange förutsättningarna är förstås nödvändigt, och ger en träning i logiskt tänkande.

Det matematiska fackspråket använder ofta ord från vardagsspråket i en ny betydelse. Visserligen finns det lärda ord som *algebra, topologi, homomorfism* och *homeomorfism*, men vardagsord som *mängd, följd, familj, grupp, ring* och *kropp* förekommer ofta. Om man hör ett ord som *homeomorfism* så förstår man att det betecknar något mer eller mindre avancerat begrepp, men när man talar om en grupp är det inte uppenbart att ordet har en annan, precis betydelse. Här finns hel skala, från ord som *följd*, som har en betydelse nära den vanliga, till ord som *finare, starkare* respektive *grövre, svagare* (om topologier), som närmast är metaforer. Mall Stålhammar (1997) har studerat metaforerna i fackspråk och allmänspråk, dock inte inom matematiken. Det skulle vara intressant att utvidga hennes studie till matematiken, men det står i all fall klart att det finns många paralleller mellan metaforerna i det matematiska språket och dem som hon studerar.

Vissa ord i allmänspråket används ganska slarvigt – sett ur matematikerns synpunkt. Ett vanligt exempel är ordet *om*, som förekommer i vardagsspråket lika väl som i det matematiska språket. Men att orden förekommer i de två

[2] Se Kiselman (1997:46–47) om matematiken som kulturellt element och subkultur.

språken innebär inte att de har samma betydelse. Man skiljer i vardagsspråket inte så noga mellan om $A \subset B$ eller $A = B$, eller mellan *om* och *om och endast om*. Här kan återigen Lewis Carroll ge oss ett exempel. Alice råkar ut för konflikten mellan de två språken i hans saga *Alice's Adventures in Wonderland*, kapitel VII, ”A Mad Tea-Party”

> 'Do you mean that you think you can find out the answer to it?' said the March Hare.
>
> 'Exactly so,' said Alice.
>
> 'Then you should say what you mean,' the March Hare went on.
>
> 'I do,' Alice hastily replied; 'at least – at least I mean what I say – that's the same thing, you know.'
>
> 'Not the same thing a bit!' said the Hatter. 'You might just as well say that "I see what I eat" is the same thing as "I eat what I see"!'
>
> 'You might just as well say,' added the March Hare, 'that "I like what I get" is the same thing as "I get what I like"!'
>
> 'You might just as well say,' added the Dormouse, who seemed to be talking in his sleep, 'that "I breathe when I sleep" is the same thing as "I sleep when I breathe"!'
>
> 'It IS the same thing with you,' said the Hatter, and here the conversation dropped, and the party sat silent for a minute, while Alice thought over all she could remember about ravens and writing-desks, which wasn't much.

6. Vanligt och matematiskt språk

Vi kan illustrera det sagda med ett diagram över de olika språken. Inom språkvetenskapen anser man ofta att det är talspråket som är det grundläggande språket; skriften är inget eget språk utan blott en representation av språket. En förmodligen auktoritativ formulering av denna ståndpunkt ges av Kenneth Hyltenstam (1997:203): ”Språk är i grunden talade kommunikationsmedel och tankeinstrument. De kan ha eller sakna skriftspråk.” I varje fall är det klart att så är fallet om man ser till språkens totala historia – människan talade väl långt innan hon kunde skriva. Men skriften har större räckvidd i rumtiden och har blivit allt viktigare.

Eftersom vi har muntligt och skriftligt språk, allmänspråk och matematiskt språk utan och med formler, så får vi sex olika fält när vi kombinerar dem.

M, muntligt språk	***S, skrift***
M1, Allmänsvenska	S1, Skriftlig allmänsvenska
M2, Muntligt matematiskt svenskt fackspråk	S2, Skrivet matematiskt svenskt fackspråk
M3, Muntligt matematiskt formelspråk	S3, Skrivna matematiska formler

Här är det tydligt att språket i ruta M3 inte kan styra det i S3, eftersom formlerna utvecklas som skrift, och M3 i själva verket blott är ett sätt att utläsa

S3. Däremot är ju, som vi konstaterat, M1 dominerande i förhållande till S1, även om det finns en påverkan i den andra riktningen. Vad så gäller M2 och S2 så är det klart att S2 är relativt starkare än S1 jämfört med förhållandena för det muntliga språket, eftersom man skriver matematik mer än man talar matematik.

Man kan nu spekulera över hur man lär sig de olika språken. Och man kanske till och med kan forska på det ...

7. Formler fordrar vana

Matematiska formler måste uppfylla stränga syntaktiska regler. Men även om de gör det kan de vara svårlästa. Det är lätt att illustrera hur svårt det matematiska formelspråket kan vara genom att byta ut några bokstäver.

Vad betyder följande?

$$\forall \delta \in \mathbf{R}\ \forall a > 0\ \exists x > 0\ \forall f \in \mathbf{R} \quad |f - \delta| \leqslant x \implies |\varepsilon(f) - \varepsilon(\delta)| \leqslant a.$$

Och vad betyder nästa formel?

$$\exists q\ \forall N > 0\ \exists \varepsilon\ \forall p \quad p \geqslant \varepsilon \implies |a_p - q| \leqslant N.$$

Båda formlerna är helt korrekt skrivna och bryter inte mot några regler – utom den oskrivna som följer av att vi vant oss vid vissa bokstäver. Men för en ny student är de bokstäver som vanligen används lika svåra som de ovanliga: allt är ju nytt.

Svaret får vi om vi byter bokstäver. Transformera det första exemplet så här:

$$(\delta, a, x, f, \varepsilon) \mapsto (a, \varepsilon, \delta, x, f).$$

Då blir det:

$$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbf{R} \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Uttytt: Funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

Transformera det andra exemplet så här:

$$(q, N, \varepsilon, p) \mapsto (a, \varepsilon, n, j).$$

Då blir det:

$$\exists a\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n\ \forall j \quad j \geqslant n \implies |a_j - a| \leqslant \varepsilon.$$

Uttytt: Talföljden $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ har ett gränsvärde.

8. Formelspråk i tidningarna

I de flesta svenska tidningar klarar man att skriva diakritiska tecken (accenter och andra små tecken på bokstäverna) i franska namn, men inte i slaviska namn. (Det säger något om språkens hackordning i Sverige.) Och formelspråket klarar tidningarna inte alls av. Här ett litet exempel:

Det stod H2SO4 i Upsala Nya Tidning 2005-02-05, sidan A24. Det ser litet konstigt ut när man är van vid H_2SO_4.

Men helt plötsligt går det: i Dagens Nyheter 2005-03-06, sidan 18, stod det ”e = mc^{2}” med ljusfarten c i kvadrat. Världens mest berömda formel kan ju inte skrivas e = mc2. Men några dagar senare står det så i alla fall.

9. Hur skriver vi tal?

Titta på en enkel mekanism i skriftspråket, nämligen hur vi stavar för att kunna återge korta och långa vokaler.

I svenskan skiljer man på långa och korta vokaler: *tal, tall; gran, grann.* Man brukar ju markera kort vokal genom att dubbelskriva följande konsonantbokstav (och kanske är konsonanten verkligen längre). Ulf Teleman (2002) berättar om hur svenskans stavning normaliserades genom en lång och mödosam process under 1700-talet. I finskan valde man en annorlunda princip.

Om vi översätter bokstäverna till siffror, så kanske det blir

`tal, tall; gran, grann`

`301, 3011, 9704, 97044`

Men i matematiken kan man fortsätta på ett sätt som inte är möjligt i svenskan:

```
30111, 301111, 3011111, ..., 3011111111111111111111111111111,...
talll, tallll, talllll, ..., talllllllllllllllllllllllllllll,...

970444, 9704444, 97044444, ..., 970444444444444444444444444444,...
grannn, grannnn, grannnnn, ..., grannnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnn,...
```

Vi ser att medan man i svenskan kan gå från ett n till två men inte till tre eller fyra, så generaliserar man i matematiken den processen och kan gå till vilket ändligt antal som helst. Man kan säga att språken antyder en viss väg, och matematiken tar fasta på denna antydan och rusar i väg hur långt som helst utan att behärska sig. Språken lugnar ner sig och dämpar tendensen att rusa i väg; matematiken är obehärskad och går rakt på långt utöver det som är rimligt. Ty få kan i ett ögonkast avläsa ett tal som 3011111111111111111111111111111. (Och mycket riktigt skriver man sällan sådana tal. Man skriver ju oftast i stället avrundat $3,01 \cdot 10^{31}$ eller 30,1 kvintillioner.)

Detta lilla exempel får mig att tänka på hur oerhört kompakt det matematiska språket är. Talet 97 044 444, som vi just sett, blir ju, om man skriver det mindre kompakt:

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 100\,000 + 7 \cdot 1\,000\,000 + 9 \cdot 10\,000\,000$$

eller

$$4 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^7,$$

och de längre talen blir förstås ännu längre. Den matematiska förklaringen kan återigen skrivas litet kortare som

$$\sum_0^8 a_j \cdot 10^j, \text{ där } a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4, \; a_5 = 0, \; a_6 = 7, \; a_8 = 9.$$

Om man skulle träffa på en varelse från en annan planet som var matematiskt kunnig men inte kände till sättet att skriva heltal, så skulle man nog förklara positionssystemet så här. Men när små barn lär sig detta system, så går de till väga på ett litet annorlunda sätt, gissar jag.

Små barn lär sig att skriva ganska stora tal, och det som ligger bakom är förstås en genialisk uppfinning, där fyran betyder helt olika saker beroende på var den står. Det är mycket långt ifrån det gamla språkliga idealet ett tecken – en betydelse.

Vi kan gå vidare på denna väg och betrakta ett polynom

$$P(x) = \sum_0^8 a_j x^j.$$

Det tal vi började med är alltså polynomets värde $P(10)$ i punkten $x = 10$, om vi låter a_0 vara siffran längst till höger, a_1 den andra siffran från höger räknat, osv. Talet är ett polynom i basen 10, men koefficienterna får inte vara negativa eller större än 9. Om man med Tom Lehrer saknar två fingrar,[3] så tittar man i stället på polynomets värde i punkten $x = 8$, alltså $P(8)$. Förklaringen som jag givit i matematiska termer är alltså ganska komplicerad. Men den kan, matematiskt sett, inte göras enklare: det visar hur avancerat och extremt förkortat beteckningssättet för vanliga heltal är.

Inom algebran brukar man ju skriva produkten av två tal a och b som ab utan något tecken mellan bokstäverna. Men om $a = 2$ och $b = 3$ så kan vi ju inte sätta in dessa tal i produkten: då skulle vi ju få $ab = 23$. Vi måste plötsligt byta beteckningar och skriva $ab = a \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$ eller $ab = a \times b = 2 \times 3 = 6$. Så till och med detta att skriva två storheter bredvid varandra är ett avancerat teckensystem, och så populärt att det betyder minst två helt olika saker: $ab \neq 10a + b$ (för det mesta).

10. Språkens algebra

Vi tittar på några vanliga ord: *stol, stol-en, stol-ar, stol-ar-na, stol-s, stol-en-s, stol-ar-s, stol-ar-na-s, sjuk-hus, sjuk-hus-arbete, sjuk-hus-miljö, skol-hus, skol-arbete, skol-arbets-lag, skol-lärare, skol-lärar-strejk.* Vi ser hur de olika ordelementen kan fogas ihop. Inte godtyckligt, men i all fall med en viss frihet. Denna ordelementens algebra är mer eller mindre regelbunden i olika språk. I engelska och franska är den mer oregelbunden än i svenska; i turkiska och esperanto är den mer regelbunden än i svenska.

Och så förstås bokstäverna. Vi kan bilda många ord från ett par bokstäver: *ort, rot, tro, tor,* men inte *otr, rto.* I en matematisk algebra skulle alla sex produkterna $ort, otr, rot, rto, tor, tro$ kunna bildas. Språket kommer med andra regler som gäller uttalet och underkänner vissa kombinationer, men godkänner tillräckligt många för att analogin med algebran skall vara tydlig. Rekordet kanske innehas av bokstäverna *a, k, s*: vi kan bilda *aks (ax), ask, kas, sak, ska* men inte *ksa*, dvs. fem av sex kombinationer är rimliga svenska ord. Om vi tar *a, l, m* duger tre av sex kombinationer som ord, *alm, lam, mal*, men inte *aml, lma, mla.*

[3]"The book [...] wants you to do it in base 8. But don't panic. Base 8 is just like base 10, really. If you're missing two fingers." (Citat från visan "New Math" på hans skiva *That Was The Year That Was* (1965).)

Ändelserna *-ar* och *-na* kan användas till ordet *bok* (trädet): *bok, bok-ar, bok-ar-na*, medan det vanligare *bok, böck-er, böck-er-na* uppvisar en förändring, för att nu inte tala om *mus, möss*; *gås, gäss*; *smörgås, smörgäss.* Och ändelsen *-na* har en helt annan roll i *blek, blek-na*; *vit, vit-na*; *svart, svart-na*; *gul, gul-na*; *röd, rod-na*; *stark, stork-na.* Nu skall man inte tro att sådana dubbelbetydelser som hos *-na* inte förekommer i matematiken. Det gör de visst – tänk på vad det betyder att skriva två symboler bredvid varandra utan något tecken emellan (ett exempel omnämnt i slutet av avsnitt 9).

En vanlig adjektivändelse är *-isk* eller *-sk.* I neutrum blir det förstås *-iskt* respektive *-skt.* Så till substantivet *kust* kan vi bilda adjektivet *kustsk*, eller hur? Och i neutrum blir det *kustskt.* Så har vi genitiv-*s*, som kan fogas även till adjektiv: *kustskts.* Kan detta förekomma naturligt? Tja, man kan tala om *en västkustsk skuta* och *ett västkustskt skepp* och i genitiv blir det då kanske: *ett ostkustskt skepps segel jämfört med ett västkustskts.* Detta visar hur långt bokstavsalgebran kan drivas. Detta är redan på gränsen av vad som kan uttalas. Längre kan man knappast gå.

Om ni tycker att detta är för extremt, tänk då på *ett reellt tals absolutbelopp jämfört med ett komplexts.*

11. Parenteser

Parentestecknen har en användning inom matematiken som liknar den de har i vanligt skriftspråk, men kanske ännu mer den som kommatecknen har.

I det vanliga språket skriver man ogärna en parentes inne i en annan, alltså (...(...)...). Detta gör matematiker utan att tveka. Man kan till exempel ha ett uttryck som $7-(4-((5-1)-(3-2)))$. Det kan tydas så att varje vänsterparentestecken flyttar ned uttrycket till en lägre nivå, och varje högerparentestecken lyfter upp det till en högre nivå. Åskådligt:

	$7 - (4 - ((5 - 1) - (3 - 2)))$
	$7 - \downarrow 4 - \downarrow\downarrow 5 - 1 \uparrow - \downarrow 3 - 2 \uparrow\uparrow\uparrow$
Nivå 0	$7 -$
Nivå -1	$4 -$
Nivå -2	$-$
Nivå -3	$5 - 1$ $3 - 2$

Men kommatecken! Dem skriver de klassiska humanisterna gärna. Det ansågs en gång mycket fint att nästla in bisatserna i varandra. Nu avråds man från detta, men vi kan i alla fall begrunda följande exempel.

Jag, som, utan att fråga dig, en av mina bästa vänner, om råd, tror mig ha förstått vad du tycker, vill inte åka.

Nivå 0	Jag ↓	vill inte åka.
Nivå -1	som ↓	tror mig ha förstått vad du tycker ↑
Nivå -2	utan att ha frågat dig ↓	om råd ↑
Nivå -3	en av mina bästa vänner ↑	

Observera att man kan läsa bara nivå 0 eller bara nivåerna 0 och -1 eller bara nivåerna 0, -1 och -2.

Bisatserna inom kommatecknen får en struktur som liknar matematikens parenteser.

Det finns några klassiska exempel på komplicerad kommatering, som detta från *Strix* 1902, nr 1, här citerat efter Holm (1960, uppslagsordet *om*): *Om dig, Eriksson, om vilken jag ej kunnat tänka mig något dylikt, har jag, då du, då jag till följd av iråkad snuva måste nysa, brast i skratt, fått en högst ofördelaktig tanke.*

Ett annat klassiskt exempel i samma bransch är det följande av August Strindberg, här citerat efter Josephson (2004:34): *Varuti just orsaken, varför staten, sedan de av proskriptionen de största brott blivit födda, ramlade, låg.* Strindberg ironiserar här över latinets satsfogningar, men hans exempel är inte så komplicerat som det första: det går, liksom det från Strix, bara ned till nivå -2. De är komplicerade på annat sätt.

Parenteser brukar orsaka problem i matematiken. Egentligen är ju bisatser inom komma ett snäpp svårare att avkoda, ty kommat visar inte om man skall gå ned eller upp, medan parentestecknen har riktning: (betyder att man skall gå ned en nivå och) att man skall gå upp.

12. Utbrytning

Att bryta ut det gemensamma är något som man sysslar med både i språken och matematiken. Vi har exemplen *växt- och djurliv, hjärt- och lungsjukdomar*, där *liv* respektive *sjukdomar* är ett gemensamt element, som kan brytas ut: *växtliv och djurliv* = (*växt och djur*)*liv*. Det kallas ”utbrytning av det gemensamma”. Samma ord, just *utbrytning*, använder man i matematiken: formeln $ac + bc = (a + b)c$ kallas utbrytning av en gemensam faktor c. Jag vet inte vilken av användningarna som är äldst eller om någon inspirerat den andra.

13. Hur långt kan man räkna?

Kaurna (uttalas [ga-úrna]) är ett australiskt språk, som talades i ett område nära Adelaide. Den sista person som talade kaurna flytande dog 1929; hon hette Ivaritji eller Ibaritji på kaurna, Mrs Amelia Taylor på engelska (Amery & Simpson 1995:146). Men den näst siste talaren dog 1907, så under sina 22 sista levnadsår hade hon ingen att tala med på kaurna (Rob Amery, personligt meddelande 1997-07-24). Hennes öde är inte unikt.

Emellertid är språket inte dött. Det har återupplivats. Det dokumenterades under 1840-talet av Christian Teichelmann och Clamor Schürmann från Dresden. Nu har en forskare, Rob Amery,[4] verkat för ett återupplivande, och det finns åter talare. Kaurnafolket, som hade övergått till engelska, har överlevt och de har nu i viss utsträckning börjat tala sitt gamla språk. Dock kan man inte veta om det nuvarande uttalet är lika med det på 1800-talet. Man har rekonstruerat

[4]Rob Amery hade en halvtidstjänst vid University of Adelaide när jag träffade honom 1997. Han ville inte ha mera: halva året var han universitetslärare; den andra halvan levde han med kaurnafolket – utanför penningekonomin. Nu är han vid University of South Australia i Adelaide.

uttalet från Teichelmanns och Schürmanns uppteckningar och med analogislut från grannspråk.

I kaurna fanns följande räkneord.

	Räkneord i kaurna
1	*kuma*
2	*purlaitye*
3	*marnkutye*
4	*yerrabula*

Det är dock inte så att kaurnafolket inte kunde räkna längre än till fyra. (Tanke och ord är inte samma sak.) För sina barn hade de benämningar enligt följande tabell (Amery & Simpson 1995:146):

Förstfödda dottern	*Kartanya, Kartiato*	Förstfödde sonen	*Kartammeru*
Andra dottern	*Waruyu*	Andre sonen	*Waritya*
Tredje dottern	*Kudnato*	Tredje sonen	*Kudnuitya*
Fjärde dottern	*Munato*	Fjärde sonen	*Munaitya*
Femte dottern	*Midlato*	Femte sonen	*Midlaitya*
Sjätte dottern	*Marruato*	Sjätte sonen	*Marrutya*
Sjunde dottern	*Wanguato*	Sjunde sonen	*Wangutya*
Åttonde dottern	(not recorded)	Åttonde sonen	(not recorded)
Nionde dottern	*Ngadlaato*	Nionde sonen	*Ngadlaitya*

Man har nu infört räkneord utgående från dessa ordningstal för barnen (Rob Amery, personligt meddelande 1997-08-11):

	Räkneord i kaurna med nya former
1	*kuma*
2	*purlaitye*
3	*marnkutye*
4	*yerrabula*
5	**mila*
6	**marru*
7	**wangu*
8	**ngarla*
9	**paua*
10	**kumirka* (from *kuma* 'one' + *irka* 'heap')
11	**kumirka kuma*
12	**kumirka purlaitye*
20	**purlirka*
100	**kuma partirka* (from *parto* 'big' + *irka* 'heap')
1 000	**kumauatta* (from *kuma* 'one' + *tauatta* 'many')
1 000 000	**kumiwurra* (from *kuma* 'one' + *wiwurra* 'multitude')

Amery anmärker angående namnet på talet fem, *mila*: ”We avoided the pre-stopped form midla = *midla* ‘woomera’.” (Det engelska ordet *woomera*, registrerat första gången 1793, betyder enligt Webster ’a wooden rod with a hooked end used by Australian aborigines for throwing a spear’).

Det nutida språket kaurna är alltså ett delvis konstruerat språk. Inte heller detta är unikt.

Vi kan notera att orden för talen ett till och med fyra inte alls påminner om dem för de fyra förstfödda döttrarna eller sönerna. Jag vet inte vilken förbindelse som fanns mellan dessa ordfamiljer. För talen fem till och med nio finns nu en tydlig förbindelse – hur uppfattas den av talarna? Vi kan som jämförelse notera att de två första ordningstalen på svenska inte liknar motsvarande kardinaltal: *den första, ett*; *den andra, två*, medan de gör det från och med *den tredje, tre*.

Ett annat ord som behövs nuförtiden är *dator*. På kaurna heter dator *muka muka karndo,* ordagrant ’blixthjärna’, bildat av *mukamuka* ’hjärna’ och *karndo* ’blixt’. På grund av att tiden går allt fortare har man numera kortat ned detta något omständiga uttryck *muka muka karndo* till *mukarndo* ’dator’. Detta var en parentes.

14. Matematiska ordböcker

En ordbok kan, något förenklat, ses som en lista med ord bildade från ett alfabet och med upplysningar om vilka ord som är synonyma, dvs. har samma betydelse. Låt oss starta med ett litet alfabet, med blott två bokstäver a och b. Vi kan då bilda en massa ord, till exempel abb, $abba$ och $ababbbabbabaaaaabbbabbababbbaba$. Vi måste också tillåta det tomma ordet. Det är inte så lämpligt att skriva det tomma ordet som ett tomrum, ty tomrummet behövs för ett annat syfte: det är redan upptaget som en viktig beteckning för ordmellanrum. Alltså hittar vi på någon annan beteckning för det, till exempel e.

I ordboken finns dessutom synonymregler, till exempel att aa är synonymt med det tomma ordet, dvs. $aa = e$, och på samma sätt att bb är synonymt med det tomma ordet, $bb = e$. Genom att använda dessa två regler kan man förenkla varje ord som innehåller upprepningar. Exempelvis kan $abaabbbababababababbbb$ förenklas till $abeebababababababaee$ och efter ytterligare steg till $bababababa$. Vi behöver alltså endast studera ord som innehåller a och b alternerande. Det finns fortfarande oändligt många ord i språket.

Vi kan nu lägga till flera regler, till exempel en som säger att $bab = aba$. Man ser lätt att varje ord med mer än tre bokstäver kan förenklas till ett ord med högst tre bokstäver. Exempelvis blir $abab = a(bab) = a(aba) = (aa)(ba) = ba$ och $baba = (bab)a = (aba)a = (ab)(aa) = ab$. Vi ser att alla ord bildade av a och b kan förenklas till ett av de sex orden e, a, b, ab, ba, aba. Nu finns det alltså bara ändligt många ord i språket.

Detta betyder att vi har ett litet språk där varje ord bildas av två bokstäver a, b och där vi har en synonymordbok med tre regler: $aa = e$, $bb = e$, $bab = aba$.

Låt oss göra en tabell över alla sammansättningar av de sju orden e, a, b, ab, ba, aba, bab utan att använda synonymordboken:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	bab
e	e	a	b	ab	ba	aba	bab
a	a	aa	ab	aab	aba	$aaba$	$abab$
b	b	ba	bb	bab	bba	$baba$	$bbab$
ab	ab	aba	abb	$abab$	$abba$	$ababa$	$abbab$
ba	ba	baa	bab	$baab$	$baba$	$baaba$	$babab$
aba	aba	$abaa$	$abab$	$abaab$	$ababa$	$abaaba$	$ababab$
bab	bab	$baba$	$babb$	$babab$	$babba$	$bababa$	$babbab$

Låt oss sedan förenkla denna genom att använda reglerna $aa = e$ och $bb = e$. Då blir det:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	bab
e	e	a	b	ab	ba	aba	bab
a	a	e	ab	b	aba	ba	$abab$
b	b	ba	e	bab	a	$baba$	ab
ab	ab	aba	a	$abab$	e	$ababa$	b
ba	ba	b	bab	e	$baba$	a	$babab$
aba	aba	ab	$abab$	a	$ababa$	e	$ababab$
bab	bab	$baba$	ba	$babab$	b	$bababa$	e

Till slut inför vi regeln $bab = aba$ och kan förenkla ytterligare:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	aba
e	e	a	b	ab	ba	aba	aba
a	a	e	ab	b	aba	ba	ba
b	b	ba	e	aba	a	ab	ab
ab	ab	aba	a	ba	e	b	b
ba	ba	b	aba	e	ab	a	a
aba	aba	ab	ba	a	b	e	e
aba	aba	ab	ba	a	b	e	e

Vi ser nu att den sista raden och den sista kolonnen är överflödiga. Om vi tar bort dessa, så får vi en fullständig tabell:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba
e	e	a	b	ab	ba	aba
a	a	e	ab	b	aba	ba
b	b	ba	e	aba	a	ab
ab	ab	aba	a	ba	e	b
ba	ba	b	aba	e	ab	a
aba	aba	ab	ba	a	b	e

Vi ser att man genom sammansättning aldrig kan komma utanför de sex orden, dvs. de sex orden kan sammansättas hur mycket som helst med varje annat ord och man kan alltid reducera resultatet till ett av dessa sex. Språket blir alltså inte större än så.

Det jag just har beskrivit kallas inom matematiken för en *grupp.* Denna term är en av dessa ganska många vardagliga ord som fått en alldeles speciell betydelse i matematiken. Det är en grupp med sex element. Den beskriver alla permutationer (omkastningar) av tre objekt, till exempel siffrorna 1, 2, 3. Det finns sex sätt att ordna dessa tre siffror, nämligen 123 (e), 132 (b), 213 (a), 231 (ab), 312 (ba), 321 (aba). Tabellen beskriver har dessa permutationer sätts samman, dvs. vad som händer när man kastar om objekten upprepade gånger. Gruppen är alltså gruppen av alla permutationer av tre element, ibland betecknad S_3.

Teorin för grupper är en viktig matematisk teori, och alla grupper kan uppfattas som en samling ord skrivna i ett visst alfabet tillsammans med en synonymordbok som talar om vilka ord som är synonyma.

Ett skriftspråk med ett lexikon över alla ord och deras synonymer är alltså något som man använder sig av i gruppteorin. Språkligare än så kan det väl knappast bli.

15. Referenser

Rob Amery; Jane Simpson 1995. Kaurna. *I:* Nick Thieberger; William McGregor, red., *Macquarie Aboriginal Words: a dictionary of words from Australian Aboriginal and Torres Strait Islander languages,* ss. 144–172. The Macquarie Library Pty Ltd, Macquarie University. xxxv + 724 ss.

Pelle Holm 1960. *Bevingade ord och andra talesätt.* Åttonde upplagan. Stockholm: Albert Bonniers förlag.

Kenneth Hyltenstam 1997. Om begreppen språk och dialekt och meänkielis status som eget språk. *I:* Eva Estergren & Hans Åhl (red.) *Mer än ett språk,* ss. 202–243. Stockholm: Norstedts.

Olle Josephson 2004. *Ju: Ifrågasatta självklarheter om svenskan, engelskan och alla andra språk i Sverige.* Stockholm: Norstedts Ordbok. 191 ss.

Christer Kiselman 1997. Matematiken i kulturen och kulturen i matematiken. *Annales Academiæ Regiæ Scientiarum Upsaliensis, 1995-1996,* **31**, 41–50.

Håkan Lennerstad; Lars Mouwitz 2004. Mathematish—a tacit knowledge of mathematics. *I:* C. Bergsten & B. Grevholm (red.), *Mathematics and language.* Proceedings of MADIF4.

Mall Stålhammar 1997. *Metaforernas mönster i fackspråk och allmänspråk.* Stockholm: Carlsson Bokförlag.

Ulf Teleman 2002. *Ära, rikedom och reda: svensk språkvård och språkpolitik under äldre nyare tid.* Stockholm: Norstedts ordbok.