La geometrio de la komputila ekrano

Christer Kiselman

Upsala Universitato

Abstract in English: *The Geometry of the Computer Screen*

Straight lines and planes have been studied during more than two thousand years, and curves like circles, ellipses, parabolas and hyperbolas for almost as long. Other curves, like lemniscates and cardioids, have been subjects of our curiousity for several centuries. For these studies we have been relying on drawings by pens on paper. The visualization by means of drawings have been essential for our perception of all kinds of geometric objects.

But nowadays more and more images are created by computers and viewed on a screen rather than on paper. Then every figure consists of a finite number of pixels. This means that the role of coordinates is no longer played by real numbers but by integers, serving as addresses of the pixels. It also means that the geometry of the computer screen no longer is that of Euclid, equipped with the coordinates of Cartesius, but something very different, called digital geometry.

One might think that digital geometry is but an approximation of the Euclidean, but in fact it is a geometry in its own right and quite exact. However, it stretches our intuition. For instance, how can a curve consist of only finitely many points? What continuity properties can such a curve have? Can it enclose points? Is that not as vane as trying to build a fence out of poles and no wires? In my lecture I shall try to clarify and illustrate these and other aspects of digital geometry.

Résumé en français : *La géométrie de l'écran de l'ordinateur*

Droites et plans ont été l'objet de recherches en mathématiques depuis deux mille ans. Depuis presque aussi longtemps on a étudié des courbes comme les cercles, ellipses, paraboles et hyperboles; d'autres courbes enfin, comme les lemniscates et cardioïdes, ont fait l'objet de notre curiosité pendant plusieurs siècles. Il est alors important de les pouvoir dessiner sur papier : la visualisation par dessin nous aide beaucoup à comprendre tout objet géométrique.

Mais aujourd'hui on utilise de plus en plus les ordinateurs pour visualiser des objets, et sur l'écran toute figure consiste en un nombre fini d'éléments, nommés pixels. Cela signifie que le rôle de coordonnées est joué non plus par les nombres réels comme chez Descartes, mais par les nombres entiers, qui servent alors comme adresses des pixels. Cela signifie aussi que la géométrie de l'écran de l'ordinateur n'est pas celle d'Euclide, ni celle quantifiée par Descartes à l'aide de coordonnées, mais une autre, différente, à savoir la géométrie digitale.

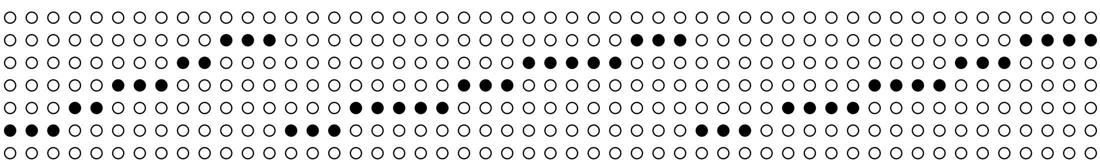
On pourrait penser que cette géométrie est en quelque sorte une approximation de la géométrie euclidienne, mais en y regardant plus profondément elle en est tout à fait indépendante et possède sa cohérence propre. Cependant, elle demande beaucoup de notre intuition. Par exemple, comment une courbe peut-elle consister en un nombre fini de points ? Quelle sont les propriétés de continuité d'une telle courbe ? Peut-elle enclore des points ? Sa construction n'est-elle pas aussi inutile que celle d'une clôture de poteaux et sans fils de fer ? Lors de mon intervention, j'essaierai de clarifier et d'illustrer ces aspects, parmi d'autres, de la géométrie digitale.

La geometrio de la komputila ekrano

Enhavo:

1. Enkonduko

Punktojn, rektojn kaj ebenojn la homo studis dum pli ol du mil jaroj, kaj certaj kurboj, kiaj elipsoj kaj hiperboloj, estis objektoj de nia scivolo preskaŭ same longe. Pli ĝeneralaj kurboj, kiaj lemniskatoj kaj kardioidoj, estis studataj dum pluraj jarcentoj. La studo de tiaj kurboj baziĝas sur la fakto ke ni povas desegni ilin sur papero kaj ekhavi ideojn el mane desegnitaj bildoj. Sed kun la komputiloj ni akiris novan metodon desegni. Sur komputila ekrano ni vidas bildojn, kaj la bildoj konsistas el etaj bilderoj, kiujn la homa okulo kunigas al geometriaj figuroj. Rekto tiam ne estas kio Eŭklido komprenis sub rekto, sed finia aro de makuletoj sur la ekrano, kiun la okulo tamen perceptas (rigardante el sufiĉe granda distanco) kiel konektitan rektopecon. (Figuro 1.)



Figuro 1. Aroj de bilderoj. Kiuj reprezentas segmentojn de rektoj?

Ĉu ekzistas geometrio por tiuj bildoj sur la ekrano? La respondo estas jesa. Ni ne kontentiĝu per la percepto de la bildoj kiel pli aŭ malpli akurataj proksimumigoj de idealaj rektoj aŭ kurboj; ni povas pritrakti tiujn finiajn arojn kun la sama ekzakto kiun havis Eŭklido en sia geometrio. Tio estas la diĝita geometrio. Ĝi estas juna kompare kun la eŭklida.

Azriel Rosenfeld donis en 1974 difinon de la nocio de diĝita rekto kaj determinis kiam aro estas la diĝitigo de eŭklida rekto. Erik Melin trovis en 2003 alian diĝitigon de rektoj, kiu respektas la topologion de Khalimsky (ni baldaŭ prezentos tiun ĉi). Ni povas paroli ankaŭ pri kurbo en la diĝita ebeno. Ni povas preni kiun ajn nocion en la eŭklida geometrio kaj klopodi traduki ĝin al la diĝita geometrio kaj vidi ĉu certa rezulto en la eŭklida geometrio veros en la diĝita.

Kiel ekzemplon ni konsideros dum tiu ĉi lekcio la klasikan teoremon de Jordan pri kurboj. Tiu teoremo pritraktas kurbojn en la eŭklida ebeno kaj diras ke fermita simpla kurbo dividas la ebenon en du partojn: unu internan kaj unu eksteran. La pruvo estas longa kaj malfacilega. Se oni anstataŭe konsideras kurbon en la diĝita ebeno – ĝi do konsistas el finia aro de bilderoj – ĉu ĝi povas dividi la ebenon en du partojn? La respondo estas jesa. Tiu rezulto estis pruvita de Efim Khalimsky (E. D. Ĥalimskij) en 1970.

Mi priskribos kelkajn nociojn en la diĝita geometrio kaj ilustros ilin per diskuto pri la diĝita versio de la teoremo de Jordan. Sed por alveni tien ni nepre rekonsideru kelkajn imagojn al kiuj ni jam (eble tro) alkutimiĝis.

Nuntempe estas facile motivi la diĝitan geometrion per ĝiaj aplikoj en komputila grafiko kaj la analizo de bildoj. Sed estas notinde ke Khalimsky enkondukis sian topologion jam en 1969, evidente ne pensante pri tiaj aplikoj.

Mi dankas al Erik Melin, kiu permesis al mi la uzadon de la figuroj 5 kaj 7, kaj al H. S. Holdgrün pro lingvaj rimarkigoj.

2. Kalkuli per karteziaj koordinatoj

La klasika geometrio temas pri punktoj, rektoj kaj ebenoj, sed ankaŭ pri cirkloj, sferoj kaj aliaj figuroj. Tiaj geometriaj objektoj estis studataj dum miloj da jaroj, kaj ni ĉiuj pli-malpli konas ilin. La grekoj kreis en la antikveco aksioman teorion, kio signifas ke oni pruvis rezultojn pri la geometriaj objektoj elirante el kelkaj bazaj supozoj, la aksiomoj, kiujn oni ne pruvis. La grekoj povis kalkuli areojn kaj volumenojn, sed alie ili ne kalkulis tre multe.

Revolucio koncerne la kalkuladon en la geometrio alvenis kun Kartezio (René Descartes, 1596–1650). Li reprezentigis punkton en la ebeno per paro de nombroj (x_1, x_2) (la nombrojn oni nomas *karteziaj koordinatoj*) kaj rekton en la ebeno per la aro de ĉiuj paroj (x_1, x_2) kiuj plenumas ekvacion $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$, kie ne ambaŭ nombroj a_1 kaj a_2 nulas. Ebeno en la tridimensia spaco prezentiĝas per la aro de ĉiuj triopoj (x_1, x_2, x_3) kiuj plenumas ekvacion $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$, kie ne ĉiuj tri nombroj a_1, a_2, a_3 nulas.

Se vi havas du rektojn en la ebeno kun la ekvacioj $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ kaj $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 = 0$, tiam ili sekcas unu la alian en certa aro, kaj tiu ĉi estas donata de ĉiuj solvoj (x_1, x_2) al ambaŭ ekvacioj. Eble tute ne ekzistas solvo (la rektoj estas malsamaj kaj paralelaj) aŭ nefinia nombro da solvoj (la rektoj koincidas), aŭ ekzistas precize unu solvo (la rektoj sin sekcas ĉe unu kaj nur unu punkto). Oni do povas per kalkulado decidi kio validas, kaj esprimi la respondon helpe de la ses nombroj a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 kaj b_3.

3. Prezenti figurojn en komputilo

Dua revolucio koncerne kalkuladon alvenis kun la komputiloj. Oni nun povas stoki kaj prilabori pli grandajn kvantojn da informo ol per papero kaj skribilo. Speciale oni povas stoki informon pri geometriaj figuroj. Ni jam scias ekde Kartezio ke du nombroj sufiĉas por priskribi punkton en ebeno, tri nombroj por punkto en la tridimensia spaco. Kiom da nombroj oni bezonas por priskribi cirklon en la ebeno? Nu, tri: la centro estas determinita de du kaj la radiuso de unu. Kiom da nombroj oni bezonas por priskribi elipsoidon en la tridimensia spaco? La centro estas donita per tri; por la tri duonaksoj oni bezonas ankoraŭ tri. Poste oni bezonas doni la direkton de la plej longa duonakso; por tio bezonatas du anguloj. Por determini la direkton de la dua plej longa duonakso oni bezonas ankoraŭ unu angulon. Sekve la elipsoido estas plene determinita de naŭ nombroj. (Se oni jam dekomence scias ke iuj aksoj estas egalaj, tiam oni bezonas malpli, ekzemple por sfero nur kvar.) Reela nombro plej ofte bezonas nefinian nombron da decimaloj por esti plene priskribita; tial ni devas kontentiĝi per stokado de finia nombro da ili, t.e. per proksimuma nombro. Stoki naŭ nombrojn kun sufiĉe granda ekzakto en komputilo ne postulas multe da memora spaco. Konklude ni povas diri ke estas per komputilo facile priskribi kun granda precizeco elipsoidon en la spaco.

Sed kiel estas se oni volas priskribi pli ĝeneralan aron? Kiom da nombroj tiam estas bezonataj? Ekzistas terure multaj aroj en la ebeno: ni komprenas ke ni devas iel proksimumigi; ni ja povas nur stoki kaj trakti informon kiu konsistas el finia nombro da signoj. Kaj tio signifas ke ni devas dividi la ebenon en pecetojn kaj diri ĉu certa peceto apartenas al la aro aŭ ne. Tiu ĉi procedo ja ne estas io kio alvenis kun la komputiloj, ĉar foto en gazeto konsistas el rastrumo, kiun oni vidas kiam oni rigardas ĝin per lupeo. La rastrumeroj estas tiel delikataj ke el iom granda distanco ili tute ne estas videblaj, kaj la okulo perceptas la bildon bone kaj ne estas ĝenata de la rastrumigo. Niaj okuloj havas limigitan kapaciton akcepti informon, kaj tiun fakton oni do eluzas kiam oni presas fotojn. Tute same komputila ekrano konsistas el finia nombro da bilderoj, kaj rekto estas finia aro de punktoj; la homa okulo kunigas tiujn ĉi al linio se ili situas sufiĉe dense.

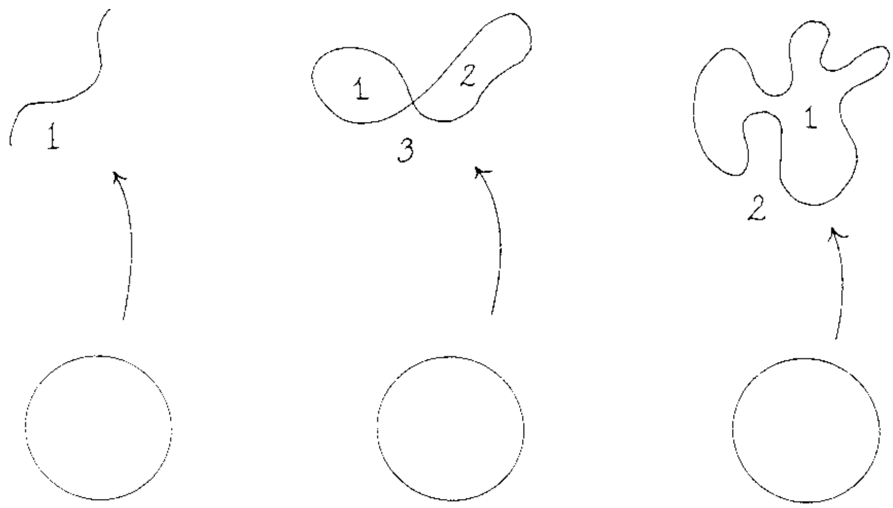
Sed la informo kiun oni bezonas stoki por priskribi arbitran aron en la ebeno estas granda. Se ni ekzemple prenas ekranon kun 1 024 oble 768 bilderoj, t.e. kiu estas dividita en 1 024 etajn intervalojn laŭ la larĝo kaj 768 intervalojn laŭ la alto, tiam ĝi enhavas $1\,024 \times 768 = 786\,432$ bilderojn. Kiel oni priskribas aron? Por ĉiu bildero oni bezonas diri ĉu ĝi apartenas al la aro aŭ ne. Se ni skribas la ciferon 1 kiam la bildero apartenas al la aro kaj nulon kiam ĝi ne apartenas, ni bezonas skribi 786 432 nulojn aŭ unuojn por priskribi ajnan subaron de la ekrano. Tial la nombro de malsamaj aroj estas $2^{786\,432} \approx 10^{236\,740}$. Oni bezonas cent paĝojn nur por skribi ĝin. Ni komparu tiun numeron kun la maso de la universo, kiun kelkaj astronomoj taksas al 10^{53} kg, kio egalas al 6×10^{79} protonaj masoj aŭ 10^{83} elektronaj masoj. Oni ja kutimas nomi grandajn nombrojn astronomiaj, sed tiu metaforo ne nur paliĝis: ĝi estas plene misgvida.[1] Per la dirita mi esperas komprenigi ke la problemo pri priskribo de formoj estas malfacila: ni bezonas metodojn por priskribi arojn kiuj ŝparas memorkapablon kaj samtempe permesas analizadon kaj komparadon de formoj.

Se ni dividas la ebenon en kvadratajn aŭ ortangulajn bilderojn, ni povas numerizi ilin per paroj de entjeraj nombroj. Ni tutsimple lasas (x_1, x_2) esti la koordinatoj por la centro de bildero laŭ iu taŭga skalo, elektita tiel ke x_1 kaj x_2 estas entjeraj. Tial ni povos paroli pri (x_1, x_2) kiel bildero, kvankam propre dirite ĝi estas la adreso de la bildero.

[1] Tiu kiu kredas ke la konkludo dependas de la relative malalta denso de la universo estas petata kalkuli la mason de fiktiva universo kun radiuso egala al $1,4 \times 10^{10}$ lumaj jaroj $\approx 1,3 \times 10^{26}$ m kaj denso egala al tiu de neŭtrona stelo, ni diru 10^{17} kg/m^3. Samas la konkludo.

4. La teoremo de Jordan

Cirklo en la ebeno dividas tiun ĉi en du partojn: internan regionon (kie la distanco al la centro estas malpli granda ol la radiuso) kaj eksteran regionon (kie la alcentra distanco estas pli granda ol la radiuso). Same ni estas alkutimiĝintaj al la fakto ke aliaj, pli ĝeneralaj kurboj dividas la ebenon en internan kaj eksteran regionojn. Ni do povas aliformigi la cirklon ne perdante ties econ dividi la ebenon en du partojn. Camille Jordan (1838–1922) pruvis en 1893 teoremon kun ĝuste tiu ĉi signifo. Se oni konsideras kurbon kiu situas en ebeno kaj kiu estas simila al cirklo en preciza senco, tiam ĝia komplemento konsistas el ekzakte du partoj. Estas kiel barilo kiu enfermas la ŝafojn kaj eksterfermas la lupon. Se la kurbo similas al la cifero ok, tiam la ebeno dividiĝas en tri partojn, kaj tiaj kurboj ne estas akceptitaj. (Vidu figuron 2.)



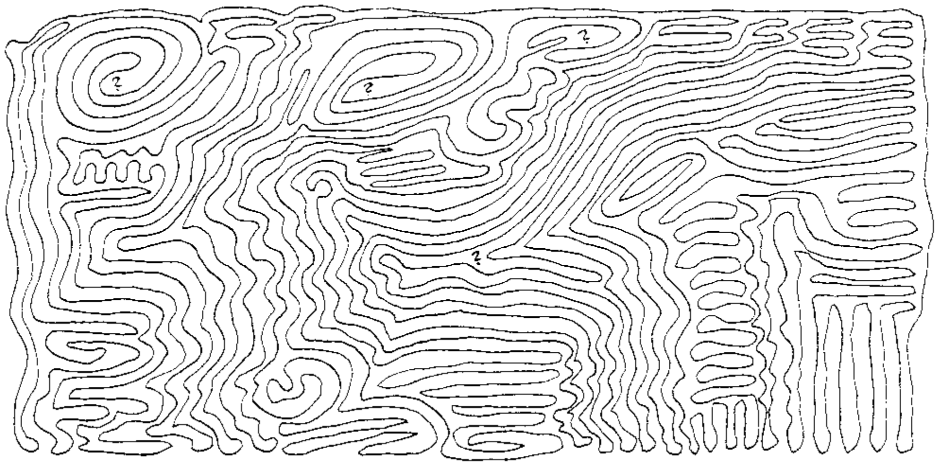
Figuro 2. Kelkaj kurboj en la ebeno: ne fermita; ne simpla; simpla kaj fermita.

La teoremo de Jordan validas por kurboj kiuj estas sufiĉe similaj al cirkloj. Kion signifas tiuj vortoj "sufiĉe similaj"? Ni nepre precizigu ilin. Same ni devas klarigi kion ni celas kiam ni diras ke la komplemento konsistas el du pecoj. Por tion fari, ni bezonas topologion – tiu ĉi estos la temo de la venonta sekcio.

La pruvo de la teoremo de Jordan estas, kiel mi jam diris, malfacilega. Por cirklo estas facile decidi ĉu oni estas ene aŭ ekstere – oni ja nur mezuras la distancon al la centro. Sed pensu pri frakto, kia la neĝera kurbo de Helge von Koch (1870–1924). Se oni estas en la apudeco de ĝi oni vidas nur pikilhavan kurbon, kaj estas neeble decidi per rigardo al punktoj ĉirkaŭe ĉu oni estas ekster aŭ ene de la kurbo. La sama validas por labirinto. (Vidu figuron 3.)

5. Topologio

Por precizigi la eldiron pri la teoremo de Jordan ni bezonas klarigon: kiuj kurboj sufiĉe similas al cirkloj? La matematika termino por la ĝusta simileco estas *homeomorfa.* Ni do postulos ke la kurbo estu homeomorfa al cirklo. Ni nomu kurbon K kaj cirklon C. Ni unue postulas ke ekzistas bijekcio de C sur K. Tio signifas ke ekzistas bildigo f de C al K (tion oni mallonge skribas $f\colon C \to K$), kiu



Figuro 3. Kiam ni estas ene de la kurbo?

estas tia ke ĉiu punkto en K estas bildo sub f de iu punkto en C, kaj ankaŭ tia ke du malsamaj punktoj en C estas bildigitaj al du malsamaj punktoj en K. Tiu postulo jam ekskludas la ok-forman kurbon, ĉar por ĝi du punktoj sur la cirklo estas bildigitaj al unu sama punkto. Sed ni per tiu postulo ne ekskludis kurbon kiu estas streko, ĉar ĝi estiĝas per tondado de cirklo. Ni povas konstrui bijekcion inter cirklo kaj streko, ekzemple se ni difinas $g(p)$ kiel la angulon kiun formas la radiuso tra p kun la akso de la koordinato x_1, elektita tiel ke $0 \leqslant g(p) < 2\pi$ (ni do uzas polusajn koordinatojn). Poste ni difinas bildigon f per la formulo $f(p) = (g(p), 0)$. Tiam ni havas bijekcion de la cirklo al streko en la ebeno. Kaj por streko la konkludo de la teoremo ne validas: ĝia komplemento konsistas el nur unu peco. Evidente ni bezonas plian econ ĉe la bildigo. Tiu eco estas la kontinueco, kiun mi nun klopodos klarigi. Ni postulu ke kaj f kaj ĝia inverso, notita f^{-1}, estas kontinuaj. Tiam f nomiĝas *homeomorfio,* kaj la cirklo C kaj la kurbo K estas *homeomorfaj,* do sufiĉe similaj en preciza senco.

Kontinueco ĉe bildigo f signifas ke malgrandaj ŝanĝoj ĉe la elira punkto (la argumento) estigas nur malgrandajn ŝanĝojn ĉe la bilda punkto. Saltoj ne rajtas okazi. Do: se punkto q estas proksima al punkto p, tiam la bildo $f(q)$ estu proksima al la bildo $f(p)$. Tio ĉi estas intuicia parolmaniero, kiun oni faru pli preciza kaj robusta, t.e. tia ke ĝi eltenas diversajn ĝeneraligojn.

Por difini kontinuecon ni bezonas topologiojn. Tiujn ĉi oni difinas per malfermitaj aroj.

En $\mathbf{R}^n$, la n-dimensia spaco de ĉiuj orditaj n-opoj de reelaj nombroj, oni difinas *malfermitan globon* kiel aron de la formo

$$B(c, r) = \{x \in \mathbf{R}^n; d(c, x) < r\}.$$

Ĝi estas la aro de ĉiuj punktoj x kies distanco al la centro c estas malpli granda ol la radiuso r (ni ĉi tie skribas $d(c, x)$ por la distanco inter c kaj x; ne gravas kiun distancon ni uzas). Poste ni difinas *malfermitan aron* A kiel aron tian ke por ĉiu ĝia punkto $c \in A$ tuta globo $B(c, r)$ por iu sufiĉe malgranda pozitiva radiuso

r estas entenata de A. (Oni nomas ĝin malfermita ĉar oni povas iomete libere ĉirkaŭpromeni en ĝi.)

Estas facile pruvi ke se ni havas ajnan familion de malfermitaj aroj, tiam ankaŭ ilia kunigaĵo estas malfermita: se $c \in \bigcup U_j = V$, tiam $c \in U_j$ por iu indico j, kaj iu globo $B(c, r)$ estas entenata de tiu U_j, sekve de V. Kaj se oni havas finian familion de malfermitaj aroj, tiam ilia komunaĵo estas malfermita aro: se $c \in \bigcap U_j = W$, tiam ekzistas globoj $B(c, r_j)$ entenataj de U_j por ĉiu indico j; tial la globo $B(c, r)$ kun r egala al la plej malgranda el ĉiuj r_j estas entenata de W.

Funkcio $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ nomiĝas *kontinua,* se por ĉiu malfermita aro B en $\mathbf{R}^m$ estas tiel ke estas malfermita la aro A de ĉiuj punktoj en $\mathbf{R}^n$ kiujn la bildigo f sendas en la aron B. Ni nun povas facile vidi ke tia funkcio ne povas fari saltojn. Se funkcio estas kontinua kaj bildigas punkton a al punkto $b = f(a)$, tiam ni prenas malfermitan aron kiu enhavas b, ekzemple globon $B(b, s)$ kun malgranda radiuso s. Tiam la aro de ĉiuj punktoj x kiujn la bildigo sendas en la globon $B(b, s)$ estas malfermita, kio signifas ke ĝi devas enhavi iun globon $B(a, r)$. La bildo de $B(a, r)$ estas do entenata de $B(b, s)$, tiel ke f ne povas fari iun grandan salton en $B(a, r)$ (ne pli grandan ol $2s$, la diametro de $B(b, s)$). Kaj, ĉar s povas esti elektita kiel ajn malgranda, eventualaj saltoj de f devas esti pli kaj pli malgrandaj en la globoj $B(a, r)$ kiujn ni trovas per tiu rezono. Per tio ni montris ke kontinuaj funkcioj tute ne povas havi salton ĉe iu punkto. Tiu observo estas grava, tiel grava ke oni prenis ĝin kiel elirpunkton por nova difino, nome kiam ne ekzistas iu distanco.

Anstataŭ difini la nocion de malfermita aro per distancoj kiel ni ĵus faris, ni iros aksioman vojon. La ecojn kiujn ni pruvis ni prenos kiel aksiomojn. Estu do X ajna aro, kaj estu $\mathcal{U}$ familio de subaroj de X; ni nomos ilin *malfermitaj.* Ni ĉifoje ne difinas la nocion de malfermita aro, sed anstataŭe postulas ke la familio $\mathcal{U}$ plenumu du aksiomojn.

Aksiomo 1. *Se U_j, $j \in J$, estas malfermitaj, kie J estas ajna aro de indicoj, tiam la kunigaĵo $\bigcup_{j \in J} U_j$ estas malfermita.*

Tio signifas ke se ni havas arojn $U_j \in \mathcal{U}$, tiam la aro V de ĉiuj punktoj kiuj apartenas al unu el la U_j ankaŭ apartenas al $\mathcal{U}$: $V \in \mathcal{U}$.

Aksiomo 2. *Se U_j, $j \in J$, estas malfermitaj, kie J estas finia aro de indicoj, tiam la komunaĵo $\bigcap_{j \in J} U_j$ estas malfermita.*

Tio signifas ke se ni havas finian nombron da aroj $U_j \in \mathcal{U}$, tiam la aro W de ĉiuj punktoj kiuj apartenas al ĉiuj el la U_j ankaŭ apartenas al $\mathcal{U}$: $W \in \mathcal{U}$.

Ĉar ni povas havi malplenan aron J (simbole $J = \varnothing$), sekvas el aksiomo 1 ke la malplena aro estas malfermita, kaj de aksiomo 2 ke la tuta spaco estas malfermita, ĉar $\bigcup_{j \in \varnothing} U_j = \varnothing$ kaj $\bigcap_{j \in \varnothing} U_j = X$.[2]

Se ni havas familion $\mathcal{U}$ de subaroj de X kiu plenumas la aksiomojn, tiam ni diras ke ni havas *topologion* sur X, kaj ke X kun tiu topologio estas *topologia spaco.* (Distanco ne nepre ekzistas.) Kaj se ni havas du topologiajn spacojn X kaj Y kaj bildigon f de X al Y, tiam ni diras ke ĝi estas *kontinua* se estas tiel ke

[2] Tiu kiu opinias ke tiu aserto estas stranga povas tutsimple aldoni kiel aksiomon 3 la aserton ke $\varnothing$ kaj X estas malfermitaj.

$\{x \in X; f(x) \in B\}$ estas malfermita por ĉiu malfermita aro B en Y – la difino estas do laŭvorte la sama kiel en la kazo kiam ni estis difinintaj la malfermitajn arojn per distanco.

En topologia spaco ni nun povas difini la nocion de koneksa aro. Aro A nomiĝas *koneksa* se ĝi ne povas esti dividita en certa senco, nome tiel ke se ni havas du malfermitajn arojn U kaj V tiajn ke $U \cup V$ enhavas A kaj $U \cap V \cap A$ estas malplena, tiam validas aŭ $A \subset U$ aŭ $A \subset V$. (Sekve $U \cap A$ aŭ $V \cap A$ estas malplena.) *Komponanto* estas maksimuma koneksa aro, t.e. koneksa aro kiu ne estas subaro de iu strikte pli granda koneksa aro. Ni nun havas ĉiujn nociojn kiujn ni bezonos por kompreni la teoremon de Jordan, kaj la klasikan, kaj la diĝitan.

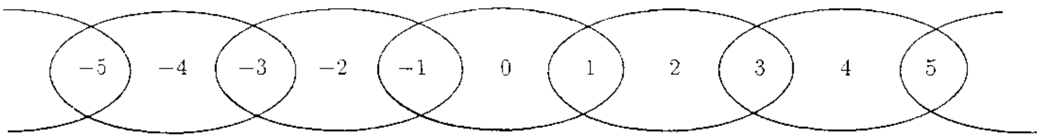
Ni donu la ekzaktan vortumadon de la klasika teoremo:

Teoremo (La teoremo de Jordan). *Ni supozu ke $f\colon C \to f(C) \subset \mathbf{R}^2$ estas homeomorfio de cirklo C al la ebeno $\mathbf{R}^2$. Tiam ĝia bildo $K = f(C)$ dividas la ebenon $\mathbf{R}^2$ en ekzakte du partojn: $\mathbf{R}^2 \smallsetminus K$ havas precize du komponantojn.*

La du terminoj *homeomorfio* kaj *komponanto* nun akiris siajn klarigojn. Per *Jordan-a kurbo* oni komprenas ĝuste homeomorfan bildon de cirklo.

6. La topologio de Khalimsky

Efim Khalimsky inventis topologion sur la entjeraj nombroj $\mathbf{Z}$ kiun li difinis jene: aro A de entjeraj nombroj nomiĝas *malfermita* se ĝi por ĉiu para nombro $2n \in A$ ankaŭ enhavas ĝiajn du neparajn najbarojn $2n-1$ kaj $2n+1$. La aro de ĉiuj paraj nombroj do ne estas malfermita, sed la aro de ĉiuj neparaj nombroj estas. Krome $\{1\}$ estas malfermita, dum $\{0\}$ ne estas malfermita. La plej malgranda aro kiu enhavas $\{0\}$ estas $\{-1, 0, 1\}$. Oni povas facile kontroli ke la malfermitaj aroj kiujn ni ĵus difinis plenumas la aksiomojn 1 kaj 2 en sekcio 5.

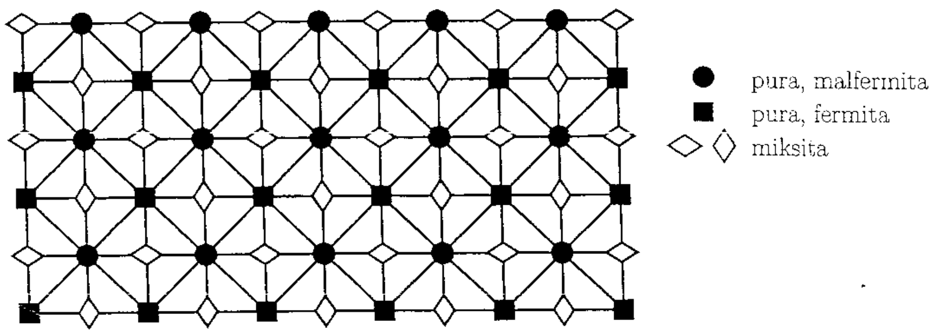


Figuro 4. La rekto de Khalimsky.

La paraj kaj neparaj nombroj evidente ludas tute malsimilajn rolojn laŭ la topologio de Khalimsky. Kion signifas tio por la kontinueco de bildigo $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$? Se ni prenas ajnan malfermitan subaron B de $\mathbf{Z}$, tiam la aro A de ĉiuj punktoj n kiujn la bildigo sendas en la aron B devas esti malfermita. Tio signifas ke se para nombro $2n$ apartenas al A, t.e. $f(2n) \in B$, tiam ankaŭ $f(2n \pm 1) \in B$. Se $f(2n)$ estas nepara, ni povas preni $B = \{f(2n)\}$ – tio ja estas malfermita aro. Kaj tiam nepre $f(2n \pm 1) = f(2n)$, t.e. la funkcio devas esti konstanta sur la aro $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$. Se, male, $f(2n)$ estas para nombro, tiam ni povas preni $B = \{f(2n)-1, f(2n), f(2n)+1\}$ kaj tiam nepre $2n \pm 1$ estu bildigita en tiun ĉi aron, kio signifas ke $f(2n \pm 1)$ povas devii maksimume per unu unuo disde $f(2n)$.

Kontinua funkcio do ne povas ŝanĝiĝi pli rapide ol per unu paŝo por ĉiu paŝo kiun faras la argumento, kio implicas ke ni ĉiam havas $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ por ĉiuj $x, y \in \mathbf{Z}$, sed kun aldona restrikto ke f devas esti konstanta sur tri punktoj $2n - 1, 2n, 2n + 1$ se ĝi alprenas neparan valoron ĉe para punkto $2n$. Oni povas esprimi tion tiel ke la funkcio povas alpreni malsamajn valorojn en x kaj $x + 1$, sed nur kiam aŭ kaj x kaj $f(x)$ estas paraj aŭ kiam ambaŭ estas neparaj. Tio signifas ekzemple ke la funkcio $f(x) = x + 2$, $x \in \mathbf{Z}$, kontinuas, sed ne la funkcio $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbf{Z}$.

Ni nun formas la ebenon $\mathbf{Z}^2$, kiu konsistas el ĉiuj paroj de entjeraj nombroj, kaj ni povas doni ankaŭ al ĝi topologion. Subaro A de $\mathbf{Z}^2$ nomiĝas *malfermita* se ĝi por ĉiu bildero $(x_1, x_2) \in A$ ankaŭ enhavas la bilderojn $(x_1 \pm 1, x_2)$ se x_1 estas para kaj $(x_1, x_2 \pm 1)$ se x_2 paras. Sekvas el tio ke se A estas malfermita kaj $(x_1, x_2) \in A$ kun kaj x_1 kaj x_2 paraj, tiam A nepre enhavu ankaŭ la ok punktojn $(x_1 \pm 1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm 1)$, $(x_1 \pm 1, x_2 \pm 1)$. Per tio ni havas topologion en la ebeno $\mathbf{Z}^2$. Ni nomas ankaŭ ĝin la *topologio de Khalimsky.* Ekzistas nun pluraj specoj de bilderoj (x_1, x_2): tiuj kie kaj x_1 kaj x_2 estas paraj; tiuj kie ambaŭ estas neparaj; kaj tiuj kie unu el la koordinatoj estas nepara kaj la alia para. Punktojn de la du unuaj specoj oni nomas *puraj*; punktojn de la tria speco *miksitaj.*



Figuro 5. La ebeno de Khalimsky.

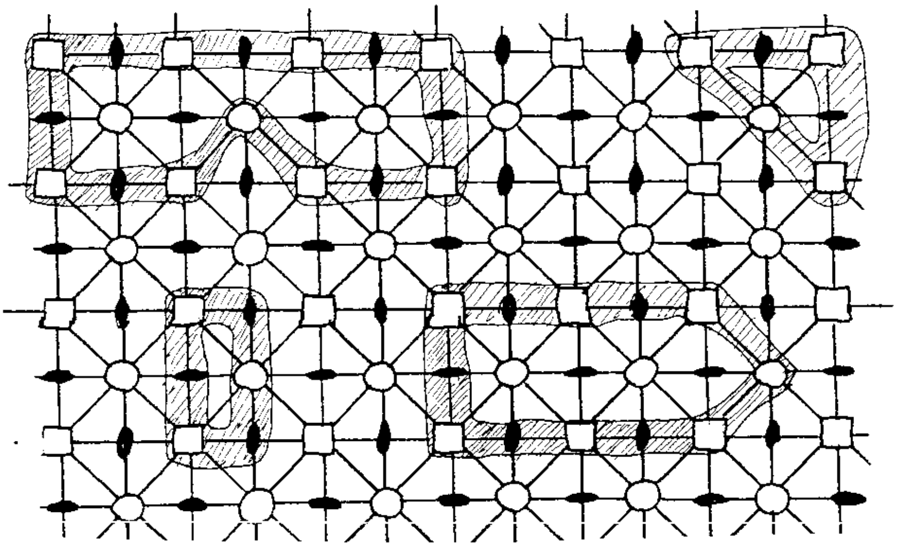
Ni povas nun paroli pri kontinua bildigo $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^2$, kie kaj $\mathbf{Z}$ kaj $\mathbf{Z}^2$ estas provizitaj per la topologio de Khalimsky. Sed ni bezonas ankaŭ analogon al la cirklo kiun ni uzis en la teoremo de Jordan. Cirklon oni ricevas de $\mathbf{Z}$ per identigo de iu para nombro m kun nulo. Tio signifas ke ni identigas la nombron $j + km$ kun j por ĉiu $k \in \mathbf{Z}$. Oni tiam diras ke oni kalkulas *module m.* Ni fakte havas ĉiutagan kutimon kalkuli horojn module 24 aŭ 12. Se oni enlitiĝas je la 23-a horo kaj dormas ok horojn, oni vekiĝas je la 7-a; la adicio do estas $23 + 8 = 7$ module 24 aŭ $11 + 8 = 7$ module 12. Ni skribu $\mathbf{Z}_m$ por la entjeraj nombroj $\mathbf{Z}$ kiam oni kalkulas module m. Tiuj nombroj povas esti reprezentitaj per la nombroj $0, 1, 2, ..., m - 1$. Se oni aldonas 1 al $m - 1$, tiam on ekhavas 0, t.e. oni rondiris la tutan horloĝon.[3] Ni diru ke $\mathbf{Z}_m$ estas *cirklo de Khalimsky.*

Diĝita kurbo de Jordan estas kontinua bildigo de cirklo de Khalimsky $\mathbf{Z}_m$ al la ebeno de Khalimsky $\mathbf{Z}^2$ tia ke ĝia inverso ekzistas kaj estas kontinua. Ni do havas

[3] Kalkuli module neparan nombron ne estas bone en tiu ĉi kunteksto, ĉar la neparaj kaj paraj nombroj ludas malsimilajn rolojn. Se oni kalkulas module neparan nombron m, la distingo ne povas esti respektata: m identiĝas kun la para nombro 0.

homeomorfion $f\colon \mathbf{Z}_m \to f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$. La difino estas la sama kiel por la klasikaj kurboj de Jordan. La bildo de la kurbo konsistas el m punktoj en la ebeno $\mathbf{Z}^2$.

Oni povas montri ke kurbo de Jordan povas turniĝi ĉe punkto nur se tiu ĉi estas pura, kaj ke ĝi povas turniĝi tie je 45 gradoj aŭ 90 gradoj, neniam je 135 gradoj. Se kurbo turniĝas ĉe miksita punkto, tiam f ne povas esti samtempe kontinua kaj enjekcia; se kurbo turniĝas je 135 gradoj, tiam la inverso f^{-1} de f ne estas kontinua. (Vidu figuron 6.)



Figuro 6. Kelkaj kurboj.

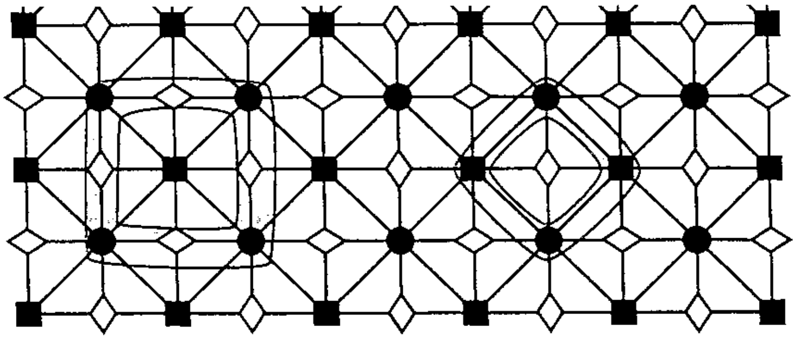
7. La teoremo de Jordan en la diĝita ebeno

Ni nun formulas la teoremon de Khalimsky.

Teoremo (La teoremo de Khalimsky por diĝitaj kurboj de Jordan). *Ni supozu ke $f\colon \mathbf{Z}_m \to f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$ estas homeomorfio de cirklo de Khalimsky $\mathbf{Z}_m$ al la diĝita ebeno $\mathbf{Z}^2$ provizita per la topologio de Khalimsky. Ĝia bildo $K = f(\mathbf{Z}_m)$ tiam dividas la ebenon $\mathbf{Z}^2$ en precize du partojn: $\mathbf{Z}^2 \smallsetminus K$ havas precize du komponantojn.*

La teoremo aspektas ekzakte same kiel en la klasika kazo en sekcio 4; nur la topologiaj spacoj estas malsamaj.

La pruvo por la diĝita teoremo estas multe pli facila ol tiu por la klasika teoremo. Tio dependas de la fakto ke diĝita kurbo de Jordan povas enhavi nur finie multajn punktojn kaj havas longon de la formo $p + q\sqrt{2}$, kie p kaj q estas nenegativaj entjeroj. Se ni mallongigas la kurbon, ĝia longo devas malpliiĝi al alia nombro $p_1 + q_1\sqrt{2}$, kie p_1, q_1 estas novaj nenegativaj entjeraj nombroj, kaj tio povas okazi nur finian nombron da fojoj. Pruvo konsistas el tio ke oni montras ke ĉiuj kurboj de Jordan krom la plej mallongaj povas esti mallongigitaj tiel ke ankaŭ la nova, pli mallonga kurbo estas kurbo de Jordan. Post finia nombro da paŝoj oni akiras kurbon kiu estas tiom mallonga ke ĝi ne permesas plian mallongigon. (Vidu figuron 7.) Sed tiam la kurbo estas tiel simpla ke oni povas rekte verigi ke



Figuro 7. La plej malgrandaj Jordan-aj kurboj.

la konkludo validas. Tiu pruvo do estas indukta pruvo laŭ la longo de la kurbo. Io tia kompreneble ne eblas en la klasika kazo.

La teoremo montras ke oni povas per diĝita kurbo enfermi kaj eksterfermi same bone kiel per kutima kurbo. La makuletoj sur la komputila ekrano povas, spite al tio ke ili estas nur finie multaj, formi barilon kun la samaj ecoj kiel la klasikaj kurboj de Jordan. La truko estas difini taŭgan topologion.

Referencoj

Halimskiĭ, E. D.

1970 Applications of connected ordered topological spaces in topology. Conference of Math. Departments of Povolsia.

Khalimsky, Efim; Kopperman, Ralph; Meyer Paul R.

1990 Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications* **36**, 1–17.

Kiselman, Christer O.

2000 Digital Jordan curve theorems. *Discrete Geometry for Digital Imagery,* 9th International Conference, DGCI 2000, Uppsala Sweden, December 13–15, 2000. (Eds. Gunilla Borgefors, Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja.) Lecture Notes in Computer Sciences **1953**, pp. 46–55. Springer.

2001 *Digital Geometry and Mathematical Morphology.* Lekciaj notoj. Upsala Universitato, Matematika instituto. Havigebla ĉe `www.math.uu.se/~kiselman`

Melin, Erik

2003 *Connectedness and continuity in digital spaces with the Khalimsky topology.* Upsala Universitato, Matematika instituto, Projekta raporto 2003:9, 43 pp. Havigebla ĉe `www.math.uu.se/~melin`

Rosenfeld, Azriel

1974 Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers,* **C-23**, No. 12, 1264–1269.